510.5
J86
R37

GENERAL LIBRARY
AUG - 9 1915
UNIV. OF MICH

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 146.

Heft 1.

Ausgegeben den 16. Juni

Berlin W. 10
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1915.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Band 146. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Steinitz, E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme (Schluß) . Seite 1
Fejér, L., Über trigonometrische Polynome . . . . . — 53

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 146.

	Seite
Faber, G., Über die *Newton*sche Näherungsformel. (Zweite Abhandlung.)	229—233
Féjer, L., Über trigonometrische Polynome	53— 82
Fekete, M., Über einen Satz des Herrn *Serge Bernstein*	88— 94
Gasiorowski, L., Die Herstellung geschlossener singularitätenfreier algebraischer Flächen von beliebig hohem Zusammenhang	156—160
Hensel, K., Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers	189—215
— — Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul	216—228
Horn, J., *Laplace*sche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen	95—115
Jackson, D., Note on rational functions of several complex variables	185—188
Kneser, A., Die *Gauss*'sche Theorie der geodätischen Linie übertragen auf das *Mayer*sche Problem der Variationsrechnung	116—127
König, R., Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale	161—184
Riesz, F., Über ein Problem des Herrn *Carathéodory*	83— 87
Schottky, F., Über einige Kurven- und Flächengleichungen, die mit der Algebra der Thetafunktionen zusammenhängen	128—155
— — Über das *Cauchy*sche Integral	234—244
v. Schrutka, L., Zur Systematik der additiven Zahlentheorie. I	245—254
Steinitz, E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Schluß.)	1— 52
Johannes Knoblauch †.	

369435

Ausgabedaten der Hefte von Band 146.

Heft 1 ausgegeben am 16. Juni 1915.
Heft 2 ausgegeben am 28. August 1915.
Heft 3 ausgegeben am 24. Januar 1916.
Heft 4 ausgegeben am 5. Mai 1916.

36432

Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme.

Von Herrn *E. Steinitz* in Breslau.

(Schluß.)*)

VI. Konvexe Körper.

§ 26. Innere Punkte und Begrenzung.

Unter einer *r-dimensionalen Umgebung* oder genauer *sphärischen* Umgebung eines Punktes α verstehen wir die Menge aller Punkte, die einer durch α gehenden r-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit angehören, und deren Abstand von α einen festen positiven Wert nicht überschreitet. Wird die Dimension nicht angegeben, so ist eine n-dimensionale Umgebung gemeint.

Ist A eine Punktmenge, $r \geqq 1$ die Dimension von *Ln.* A (§ 4), die wir auch kurz als Dimension von A bezeichnen, so soll ein Punkt α *innerer Punkt* von A heißen, wenn eine r-dimensionale Umgebung von α existiert, deren sämtliche Punkte A angehören. — Ist p der Radius dieser Umgebung, so ist jeder ihrer Punkte ξ, für den $|\xi - \alpha| < p$ ist, ebenfalls innerer Punkt. Ist daher B das System der inneren Punkte von A, so ist jeder Punkt von B auch innerer Punkt von B. Die Punktmenge B enthält also nur innere Punkte.

Ist A ein System von $r+1$ Punkten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_r$, die keiner linearen Mannigfaltigkeit von weniger als r Dimensionen angehören, so soll das r-dimensionale konvexe System $\bar{A}$ ein r-dimensionales *Simplex* heißen**).

---

*) S. Bd. 143, S. 128—175 und Bd. 144, S. 1—40.

**) *P. Schoute*, Mehrdimensionale Geometrie II (Sammlung *Schubert*), S. 1.

Bezeichnet A_i $(i = 0, 1, \dots r)$ das System, welches nach Weglassung von α_i aus A zurückbleibt, Λ bzw. Λ_i die durch A bzw. A_i bestimmte lineare Mannigfaltigkeit von r bzw. $r-1$ Dimensionen, so wird in der Form

$$(1.) \qquad \gamma = c_0\alpha_0 + \cdots + c_r\alpha_r \qquad (c_0 + \cdots + c_r = 1)$$

jeder Punkt von Λ einmal dargestellt. Schreibt man $c_i = 0$ vor, so erhält man die Mannigfaltigkeit Λ_i. Durch diese wird Λ in zwei Halbmannigfaltigkeiten eingeteilt, von denen diejenige Δ_i, welche α_i enthält, durch die Vorschrift $c_i \geqq 0$ erhalten wird. Das Simplex $\bar{\mathsf{A}}$ ist der Durchschnitt der $r+1$ Halbmannigfaltigkeiten Δ_i. Liegt ein Punkt γ des Simplexes auf Λ_i, so liegen in jeder Umgebung von γ Punkte aus Λ, die nicht zu Δ_i, also nicht zu $\bar{\mathsf{A}}$ gehören. Ist aber γ_0, wie wir jetzt annehmen wollen, ein Punkt von $\bar{\mathsf{A}}$, der keiner der Mannigfaltigkeiten Λ_i (keinem der Simplexe $\bar{\mathsf{A}}_i$) angehört, ein Punkt also, bei dessen Darstellung in der Form (1.) alle Koeffizienten c positiv ausfallen, und ist p der kleinste der $r+1$ Abstände des Punktes γ von $\Lambda_i (i = 0, \dots r)$, so gehört die in Λ gelegene Umgebung $|\xi - \gamma_0| \leqq p$ zu $\bar{\mathsf{A}}$; γ_0 ist also innerer Punkt von $\bar{\mathsf{A}}$. Ist andererseits q der größte der Abstände $|\alpha_i - \gamma_0|$ $(i = 0, 1, \dots r)$, so ist $\bar{\mathsf{A}}$ in der in Λ gelegenen sphärischen Umgebung von γ_0 enthalten, welche durch die Ungleichung $|\xi - \gamma_0| \leqq q$ definiert wird. Bezeichnen wir diese beiden Umgebungen mit T_1 und T_2, mit m eine positive Zahl, mit γ_1 einen Punkt von Λ, mit Σ die in Λ gelegene Umgebung von γ_1 mit dem Radius m, so wird Σ durch jede der beiden Gleichungen

$$(2.) \qquad \Sigma = \gamma_1 + \frac{m}{p} \cdot (-\gamma_0 + \mathsf{T}_1), \quad \Sigma = \gamma_1 + \frac{m}{q} \cdot (-\gamma_0 + \mathsf{T}_2)$$

dargestellt. Die Punktmengen

$$\mathsf{B}_1 = \gamma_1 + \frac{m}{p} \cdot (-\gamma_0 + \bar{\mathsf{A}}), \quad \mathsf{B}_2 = \gamma_1 + \frac{m}{q} \cdot (-\gamma_0 + \bar{\mathsf{A}})$$

stellen in Λ gelegene r-dimensionale (zu $\bar{\mathsf{A}}$ ähnliche) Simplexe dar, für welche γ_1 innerer Punkt ist. Da T_1 in $\bar{\mathsf{A}}$, $\bar{\mathsf{A}}$ in T_2 enthalten ist, so folgt: B_2 ist in Σ, Σ in B_1 enthalten. Man kann also zu jeder sphärischen Umgebung eines Punktes γ_1 zwei Simplexe von gleicher Dimension bestimmen, von denen das eine die Umgebung enthält, das andere in ihr enthalten ist, und die beide γ_1 als inneren Punkt haben.

Hiernach kann man in folgender Weise zu einer nicht metrischen Erklärung des Begriffes „innerer Punkt“ gelangen. Man geht von der

oben gegebenen Definition des r-dimensionalen Simplexes $\overline{\mathsf{A}}$ aus, bezeichnet zunächst speziell als inneren Punkt des Simplexes $\overline{\mathsf{A}}$ jeden solchen, der $\overline{\mathsf{A}}$, aber keinem der Simplexe $\overline{\mathsf{A}}_i (i = 0, \ldots r)$, angehört. Sodann erklärt man allgemein als inneren Punkt einer r-dimensionalen Punktmenge Γ jeden Punkt, der innerer Punkt eines in Γ enthaltenen r-dimensionalen Simplexes ist. — Ebenso kann man den Begriff „absolut beschränkt" nichtmetrisch so fassen: *Die Punktmenge Γ heißt absolut beschränkt, wenn sie einem Simplex angehört.* — Eine Punktmenge Γ, die nur *einen* Punkt enthält, mag als 0-dimensionaler Simplex gelten, dieser Punkt jedoch nicht als innerer angesehen werden. — Bezeichnen wir als *einfache r-dimensionale Umgebung* eines Punktes γ jedes r-dimensionale Simplex, welches γ als inneren Punkt hat, so ist es für die Anwendungen, die wir bisher von dem Begriff Umgebung gemacht haben, gleichgültig, ob wir eine sphärische oder einfache meinen, weil in jeder sphärischen eine einfache, in jeder einfachen eine sphärische enthalten ist. Deuten wir den bei der Definition des Häufungspunktes vorkommenden Ausdruck *Umgebung* im Sinne von *einfache Umgebung*, so ist auch der Häufungspunkt nichtmetrisch definiert.

1. *Jede konvexe Punktmenge Γ, die mehr als einen Punkt enthält, besitzt innere Punkte.*

Denn, wenn die Punktmenge Γ r-dimensional ist, so kann man ihr ein System A von $r+1$ Punkten entnehmen, die keiner Mannigfaltigkeit von weniger als r Dimensionen angehören. Das r-dimensionale Simplex $\overline{\mathsf{A}}$ ist dann in Γ enthalten und besitzt innere Punkte; diese sind auch innere Punkte von Γ.

Es sei α ein beliebiger, β ein innerer Punkt einer konvexen Punktmenge A. Gehört dann jeder der Ungleichung $|\xi - \beta| \leqq p$ $(p > 0)$ genügende Punkt ξ aus *Ln.* A zu A, ist $\gamma = (1-c)\alpha + c\beta$ ein von α verschiedener Punkt zwischen α und β, also $0 < c \leqq 1$, δ ein Punkt aus *Ln.* A, dessen Abstand von γ nicht größer als cp ist, und wird β' durch die Gleichung $\delta = (1-c)\alpha + c\beta'$ bestimmt, so liegt δ zwischen α und β', und es wird $|\beta' - \beta| = \frac{|\delta - \gamma|}{c} \leqq p$. Daher gehört β' und, wegen der Konvexität von A, auch δ zu A. Dies besagt:

2. *Zwischen zwei Punkten einer konvexen Punktmenge, von denen wenigstens einer ein innerer ist, liegen lauter innere Punkte.*

Die nicht-inneren Punkte einer konvexen Punktmenge A werden *Begrenzungspunkte* genannt; ihre Gesamtheit heißt *Begrenzung* und, wenn A abgeschlossen und n-dimensional ist, auch *Oberfläche* von A. Aus 2. folgt, daß ein von einem inneren Punkte ausgehender Strahl nicht mehr als einen, eine Gerade, die durch einen inneren Punkt geht, nicht mehr als zwei Begrenzungspunkte enthalten kann.

Eine Strecke, die einen Punkt α einer Punktmenge A mit einem nicht zu A gehörigen Punkt β verbindet, muß wenigstens einen solchen Punkt γ enthalten, daß in jeder Umgebung von γ auf der Strecke Punkte von A liegen und solche, die nicht zu A gehören. Ist A abgeschlossen, so gehört γ zu A und gehört also, wenn A konvex ist und die Strecke in *Ln.* A liegt, der Begrenzung an. Die Streckenpunkte zwischen α und γ liegen dann in, die andern außerhalb A.

Es sei A wieder eine beliebige Punktmenge, ω ein Punkt in *Ln.* A, B das kleinste A enthaltende Strahlsystem vom Ursprung ω. $\overline{\mathsf{B}}$ ist dann ebenfalls ein Strahlsystem vom Ursprung ω und enthält $\overline{\mathsf{A}}$; und zwar ist $\overline{\mathsf{B}}$ das kleinste derartige Strahlsystem; denn dieses enthält A, also B, und da es konvex sein muß (§ 19, 6.), auch $\overline{\mathsf{B}}$. $\overline{\mathsf{B}}$ besteht demnach aus allen Strahlen des Punktes ω, die wenigstens einen von ω verschiedenen Punkt aus $\overline{\mathsf{A}}$ enthalten. Ist B innerhalb *Ln.* A allseitig, so wird $\overline{\mathsf{B}} = Ln.$ A. Nimmt man in diesem Falle, wenn r die Dimension von *Ln.* A bezeichnet, $r+1$ Punkte $\omega+\alpha_0, \dots \omega+\alpha_r$ so in *Ln.* A an, daß ω innerer Punkt des von ihnen bestimmten r-dimensionalen Simplexes ist, so besteht eine Gleichung

(3.) $\omega = c_0(\omega+\alpha_0) + \cdots + c_r(\omega+\alpha_r) \quad (c_0+\cdots+c_r=1,\ c_0>0, \dots c_r>0).$

Wählt man dann auf den durch die Punkte $\omega+\alpha_i$ gehenden Strahlen des Ursprungs ω die Punkte $\omega+c_0'\alpha_0, \dots \omega+c_r'\alpha_r$ innerhalb $\overline{\mathsf{A}}$ und $\neq\omega$, und setzt man

$$\frac{c_0}{c_0'} + \cdots + \frac{c_r}{c_r'} = s,$$

so gehört das durch die Punkte $\omega+c_i'\alpha_i$ bestimmte Simplex T zu $\overline{\mathsf{A}}$, und aus (3.) folgt $c_0\alpha_0+\cdots+c_r\alpha_r=0$ und weiter

$$\omega = \frac{c_0}{s c_0'}(\omega+c_0'\alpha_0) + \cdots + \frac{c_r}{s c_r'}(\omega+c_r'\alpha_r).$$

Diese Gleichung zeigt, daß ω innerer Punkt von T, also auch von $\overline{\mathsf{A}}$ ist. Geht man umgekehrt davon aus, ω als inneren Punkt von $\overline{\mathsf{A}}$ vorauszusetzen, so folgt unmittelbar $\overline{\mathsf{B}} = Ln.$ A und hieraus, daß B innerhalb *Ln.* A

allseitig ist. — Setzen wir A konvex voraus, so wird $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$. Ist ω nicht innerer Punkt von A, so erfüllt, wie wir sahen, das konvexe Strahlsystem B nicht die ganze Mannigfaltigkeit *Ln.* A. Also ist auch das Strahlsystem B′ nur ein echter Teil von *Ln.* A. Ein in *Ln.* A gelegener Strahl des Ursprungs ω, der nicht zu B′ gehört, enthält aber außer ω keinen Punkt von B′, also, da A Teil von B und somit A′ Teil von B′ ist, auch keinen Punkt von A′. ω kann also in diesem Falle auch nicht innerer Punkt von A′ sein. — Wir fassen diese Ergebnisse in den folgenden Sätzen zusammen.

3. *Ist* A *eine beliebige Punktmenge, so ist ein Punkt* ω *aus Ln.* A *dann und nur dann innerer Punkt von* $\overline{A}$, *wenn das kleinste* A *enthaltende Strahlsystem vom Ursprunge* ω *innerhalb Ln.* A *allseitig ist.*

4. *Ist* A *eine konvexe Punktmenge, so ist jeder innere Punkt von* A′ *auch innerer Punkt von* A.

Ist A eine konvexe Punktmenge, die mehr als einen Punkt enthält, B das System der inneren Punkte (Satz 1.), so ist B konvex (Satz 2.). Jeder Punkt α von A gehört zu B′, weil auf der Verbindungsstrecke von α mit einem Punkte aus B, mit eventueller Ausnahme von α selbst, nur Punkte aus B liegen. B′ enthält also A, mithin auch A′. Da aber B Teil von A ist, so ist B′ Teil von A′, und es ergibt sich $B' = A'$.

Es sei A wieder eine konvexe Punktmenge, r ihre Dimension, und es werde *Ln.* $A = \Lambda$ gesetzt. Wir projizieren auf eine lineare Mannigfaltigkeit M und erhalten als Projektion von Λ eine lineare Mannigfaltigkeit Λ_1, als Projektion von A eine konvexe Punktmenge A_1. Es sei ω ein innerer Punkt von A, ω_1 seine Projektion. Wenn sich Λ_1 nicht auf einen Punkt reduziert, so können wir von ω_1 aus innerhalb Λ_1 Strahlen ziehen. Jeder solche Strahl ist die Projektion wenigstens eines in Λ gelegenen Strahles des Ursprungs ω. Nehmen wir auf diesem innerhalb A einen von ω verschiedenen Punkt η an, so ist seine Projektion $\eta_1 \neq \omega_1$ und liegt in A_1 sowie auf dem durch ω_1 gezogenen Strahle. Da dieser innerhalb Λ_1 beliebig war, so ist das kleinste A_1 enthaltende Strahlsystem des Ursprungs ω_1 innerhalb Λ_1 allseitig, ω_1 ein innerer Punkt von A_1. Dieses Resultat muß auch noch gelten, wenn wir unter Beibehaltung der übrigen Annahmen die Konvexität von A aufgeben. Denn alsdann ist doch der innere Punkt ω auch innerer Punkt eines konvexen r-dimensionalen Teils von A, nämlich

einer gewissen sphärischen oder einfachen Umgebung. — Führen wir jetzt wieder die Annahme der Konvexität von A ein, und bezeichnen wir mit B das System der inneren Punkte von A, mit B_1 seine Projektion. B_1 ist wie B konvex und enthält, wie soeben gezeigt, nur innere Punkte von A_1. B_1 enthält aber auch alle inneren Punkte von A_1. Ist nämlich α_1 zunächst ein beliebiger Punkt von A_1, so ist α_1 Projektion eines Punktes α von A, α Häufungspunkt von B und daher (weil beim Projizieren nie eine Verlängerung der Strecken eintritt) α_1 Häufungspunkt von B_1. A_1 ist also Teil von B_1'. Jeder innere Punkt von A_1 ist also innerer Punkt von B_1' und daher (Satz 4.) auch (innerer) Punkt von B_1, d. h. Projektion eines inneren Punktes von A. Also:

5. *Wenn die Projektion einer Punktmenge* A *auf eine lineare Mannigfaltigkeit* M *sich nicht auf einen einzigen Punkt reduziert, so ist die Projektion jedes inneren Punktes von* A *ein innerer Punkt der Projektion. Ist* A *konvex, so ist auch jeder innere Punkt der Projektion Projektion wenigstens eines inneren Punktes von* A.

Es sei A eine r-dimensionale konvexe und abgeschlossene Punktmenge, $\Lambda = Ln.\,A$, ω ein innerer Punkt von A. Wir setzen $\Lambda = \omega + M$. Ein in Λ gelegener Strahl vom Ursprung ω liegt entweder ganz in A, oder ein bestimmtes Stück dieses Strahles gehört A an. Die Länge dieses Stückes bezeichnen wir mit $l(\alpha)$, wenn α die Richtung des Strahles ist. $l(\alpha)$ bleibt oberhalb einer festen positiven Größe und ist eventuell $= \infty$ zu setzen. Wir definieren ferner eine Funktion $f(\xi)$ für alle Zahlen ξ des Moduls M durch die Gleichungen

$$f(0) = 0, \quad f(\xi) = |\xi| : l\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \qquad (\xi \neq 0),$$

wobei im Fall $l\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) = \infty$ $f(\xi) = 0$ zu setzen ist*). Hiernach ist für $c > 0$ $f(c\xi) = cf(\xi)$, $\lim_{\xi=0} f(\xi) = 0$, und die Ungleichung $f(\xi) \leqq 1$ drückt aus, daß der Punkt $\omega + \xi$ zu A gehört, die Ungleichung $f(\xi) < 1$, daß er innerer Punkt von A ist. Ist $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) > 0$, und wird $f(\gamma) = c$, $f(\delta) = d$, $\gamma = c\gamma'$, $\delta = d\delta'$ gesetzt, so ergibt sich $f(\gamma') = 1$, $f(\delta') = 1$. Daher gehören die Punkte $\omega + \gamma'$, $\omega + \delta'$, ebenso der zwischen ihnen gelegene Punkt

*) Vgl. *H. Minkowski*, Geometrie der Zahlen, § 4.

$\omega + \frac{c\gamma' + d\delta'}{c+d} = \omega + \frac{\gamma+\delta}{c+d}$ zu A, und es folgt $f\left(\frac{\gamma+\delta}{c+d}\right) \leqq 1$, $f(\gamma+\delta) \leqq c+d$ $= f(\gamma) + f(\delta)$,

$$f(\gamma+\delta) \leqq f(\gamma) + f(\delta). \tag{4.}$$

Um zu zeigen, daß diese Ungleichung auch in den vorher ausgeschlossenen Fällen $f(\gamma) = 0$, $f(\delta) = 0$ gilt, bezeichnen wir mit c_1 und d_1 irgend zwei den Ungleichungen $c_1 > f(\gamma)$, $d_1 > f(\delta)$ genügende Zahlen, so daß $c_1 + d_1$ jede Zahl oberhalb $f(\gamma) + f(\delta)$ sein kann, und setzen $\gamma = c_1\gamma_1$, $\delta = d_1\delta_1$. Dann ist $f(\gamma_1) < 1$, $f(\delta_1) < 1$; $\omega + \gamma_1$, $\omega + \delta_1$, $\omega + \frac{c_1\gamma_1 + d_1\delta_1}{c_1 + d_1} = \omega + \frac{\gamma+\delta}{c_1+d_1}$ sind innere Punkte von A; es wird $f(\gamma+\delta) < c_1 + d_1$. D. h. jede Zahl die $> f(\gamma) + f(\delta)$ ist, ist auch $> f(\gamma+\delta)$, woraus wieder (4.) folgt. Setzt man in (4.) $\gamma + \delta = \beta$, so erhält man $f(\beta) - f(\gamma) \leqq f(\beta - \gamma)$, ebenso $f(\gamma) - f(\beta) \leqq f(\gamma - \beta)$, woraus in Verbindung mit $\lim_{\xi=0} f(\xi) = 0$ folgt, daß die Funktion $f(\xi)$ in ihrem ganzen Verlaufe stetig ist. — Da für jede Richtung α aus M $f(\alpha) = 1 : l(\alpha)$, $l(\alpha) = 1 : f(\alpha)$ wird, so ist auch die Funktion $l(\alpha)$ stetig, soweit sie endlich ist. Ist daher die Funktion $l(\alpha)$ überall endlich, so ist sie auch beschränkt. D. h. eine konvexe Punktmenge, die keinen Halbstrahl enthält, ist absolut beschränkt. —

Es sei ω ein Punkt einer konvexen abgeschlossenen Punktmenge A, $\omega + \mathsf{B}$ das System derjenigen Strahlen des Ursprungs ω, die ganz in A liegen, Γ das System aller Punkte γ, für welche $\gamma\mathsf{A}$ nach oben beschränkt ist. Dann ist Γ ein konvexes Strahlsystem vom Ursprung 0 (§ 19, 2.), ebenso Γ'. Für jede Zahl γ aus Γ ist $\gamma\mathsf{A}$, und da $\omega + \mathsf{B}$ Teil von A ist, auch $\gamma(\omega + \mathsf{B})$ und deshalb auch $\gamma\mathsf{B}$ nach oben beschränkt. Da B Strahlsystem vom Ursprung 0 ist, so ist 0 die obere Grenze von $\gamma\mathsf{B}$ (§ 19). Für jedes Zahlenpaar β, γ aus B, Γ ist daher $\beta\gamma \leqq 0$. Mithin ist 0 obere Schranke von $\beta\Gamma$, und da Γ ein Strahlsystem vom Ursprung 0 ist, auch obere Grenze von $\beta\Gamma$, ebenso von $\beta\Gamma'$. Wird andererseits von einer Zahl β vorausgesetzt, daß $\beta\Gamma'$ die 0 zur oberen Grenze hat, und stellt die Ungleichung $\gamma\xi \leqq g$ irgendeinen A enthaltenden Halbraum dar, so gehört γ zu Γ, und es wird daher für $p > 0$

$$\gamma(\omega + p\beta) \leqq \gamma\omega \leqq g.$$

Der Punkt $\omega + p\beta$ gehört demnach zu jedem A enthaltenden Halbraum, also zu A selbst. β ist daher Punkt von B. Somit sind B und Γ' komple-

mentäre Strahlsysteme. Hieraus ist auch zu sehen, daß das Strahlsystem B konvex, abgeschlossen und unabhängig davon ist, welcher Punkt ω in A gewählt wurde. Somit ist gezeigt:

6. *Ist* A *eine konvexe abgeschlossene Punktmenge,* Γ *das System aller Punkte* γ, *für welche* γ A *nach oben beschränkt ist, also ein konvexes Strahlsystem vom Ursprung* 0, B *das zu* Γ' *komplementäre Strahlsystem,* ω *ein beliebiger Punkt aus* A, *so besteht* $\omega + $ B *aus allen den Strahlen des Ursprungs* ω, *die ganz in* A *liegen.*

7. *Durch jeden Punkt* ω *auf der Oberfläche einer n-dimensionalen konvexen abgeschlossenen Punktmenge* A *geht wenigstens eine Stützebene.*

Denn das kleinste A enthaltende Strahlsystem B vom Ursprung ω ist nicht allseitig (Satz 3.), besitzt also Stützebenen. Diese gehen durch ω und sind Stützebenen von A. — Aus der S. 253 Zeile 7ff. gemachten Bemerkung folgt:

8. *Eine konvexe abgeschlossene Punktmenge ohne Begrenzung ist eine lineare Mannigfaltigkeit.* —

9. *Ist* Φ *die Begrenzung einer konvexen abgeschlossenen Punktmenge* A, *und* A *keine Halbmannigfaltigkeit, so ist* $\overline{\Phi} = $ A.

Beim Beweise dürfen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daß A n-dimensional ist. Dann folgt, da A kein Halbraum ist, daß A wenigstens nach zwei Richtungen α, β beschränkt ist (§ 11, 3.). Man kann dann eine dritte Richtung γ so bestimmen, daß $\alpha\gamma > 0$, $\beta\gamma < 0$ ist. Sind nun $\alpha\xi = a$, $\beta\xi = b$ die Gleichungen der Stützebene in den Richtungen α, β, so wird für einen inneren Punkt ω von A $\omega\alpha < a$, $\omega\beta < b$. Durchläuft x die positiven Zahlen, so werden die Ausdrücke $(\omega + x\gamma)\alpha$, $(\omega - x\gamma)\beta$ schließlich die Werte a bzw. b übersteigen. Dies besagt, daß auf der Geraden durch ω mit den Richtungen $\pm\gamma$ zu beiden Seiten von ω äußere Punkte, also auch Punkte der Begrenzung Φ liegen. Daher gehört ω zu $\overline{\Phi}$, womit 9. bewiesen ist.

Es sei A eine konvexe, abgeschlossene, n-dimensionale, nicht den ganzen Raum erfüllende Punktmenge. — Ist A nur nach einer Richtung beschränkt, so ist A ein Halbraum, man kann also auf der Oberfläche von jedem Punkte zu jedem andern auf geradlinigem Wege gelangen. Ist A nach zwei entgegengesetzten Richtungen $\alpha, -\alpha$ beschränkt, so besteht A aus allen Punkten ξ, welche einer Ungleichung von der Form

$a \leqq \alpha\xi \leqq b$ genügen. Die Oberfläche besteht aus den beiden Parallelebenen $\alpha\xi = a$, $\alpha\xi = b$, also aus zwei getrennten Stücken. Wir wollen zeigen, daß in allen andern Fällen die Oberfläche kontinuierlich verläuft, d. h., daß man auf ihr von jedem Punkte zu jedem anderen auf einem kontinuierlichen Wege gelangen kann. — Zu diesem Zweck betrachten wir zwei Oberflächenpunkte und bezeichnen mit ω den Mittelpunkt, mit $\pm\alpha$ die Richtung, mit $2a$ die Länge ihrer Verbindungsstrecke, mit Λ die Gerade, in welcher sie liegt. Wenn die Verbindungsstrecke ganz auf der Oberfläche liegt, so stellt sie selbst einen Weg der verlangten Art dar. Von diesem Falle sehen wir jetzt ab. Die Verbindungsstrecke enthält dann außer den Oberflächenpunkten $\omega \pm a\alpha$ nur noch innere Punkte. — Es seien T_1, T_2 Stützebenen durch $\omega + a\alpha$ bzw. $\omega - a\alpha$. Diese können nicht beide vollständig in A liegen; sonst müßten sie parallel sein (weil eine konvexe Punktmenge, die zwei nicht parallele Ebenen enthält, notwendig den ganzen Raum umfaßt), und A würde aus den Punkten zwischen ihnen bestehen. Da wir dies ausgeschlossen haben, so wird wenigstens die eine der Stützebenen T_1, T_2, etwa T_1 Punkte enthalten, die nicht zu A gehören. Es sei dann Λ_1 eine durch $\omega + a\alpha$ gehende, in T_1, aber nicht vollständig in A gelegene Gerade, N die lineare zweidimensionale Mannigfaltigkeit, welche Λ und Λ_1 verbindet, A_1 der Durchschnitt von A und N. A_1 liegt ganz in der einen der beiden Halbmannigfaltigkeiten, in welche N durch Λ_1 geteilt wird. Wenn es also in N Strahlen des Ursprungs $\omega + a\alpha$ gibt, die ganz in A liegen, so müssen sie eben dieser Halbmannigfaltigkeit angehören; sie bilden ferner ein konvexes System (Satz 6.). Zwei Strahlen Σ_1 und Σ_2 dieses Systems, das wir $(\omega + a\alpha) + \Sigma$ nennen wollen, können nicht in die Gerade Λ_1 fallen, da diese nicht ganz in A liegt. Es kann auch der in Λ gelegene und durch ω gehende Strahl des Ursprungs $\omega + a\alpha$, da von ihm nur ein endliches Stück A angehört, nicht zwischen Σ_1 und Σ_2 liegen. Daher liegt das ganze System $(\omega + a\alpha) + \Sigma$ auf einer Seite der Geraden Λ und dasselbe gilt von dem System $\omega + \Sigma$, welches die ganz in A gelegenen Strahlen von N mit dem Ursprung ω umfaßt. Von den beiden Halbmannigfaltigkeiten, in welche N durch Λ zerlegt wird, hat daher wenigstens die eine, N_1, nur eine absolut beschränkte Punktmenge mit A gemein. Ist β die Richtung des in N_1 gelegenen zu Λ senkrechten Strahles, x eine Veränderliche, die das Intervall 0 bis π durchläuft, und wird

$$\cos x \cdot \alpha + \sin x \cdot \beta = \xi$$

gesetzt, so wird

$$\xi^2 = 1, \quad \beta\xi = \sin x \geqq 0.$$

ξ stellt also die Richtung eines Strahls vom Ursprung ω dar, der ganz in N_1 liegt, von dem also nur ein endliches Stück, das wir $l(\xi)$ nennen wollen, zu A gehört. $l(\xi)$ ist eine stetige Funktion von ξ, also auch von x. Ebenso ist

$$\omega + l(\xi) \cdot \xi$$

eine stetige Funktion von x. Dieser Ausdruck stellt aber den Schnittpunkt des Strahls mit der Oberfläche dar. Für $x = 0$ und $x = \pi$ erhalten wir die beiden gegebenen Oberflächenpunkte $\omega + a\alpha$, $\omega - a\alpha$. Der variable Punkt $\omega + l(\xi) \cdot \xi$ beschreibt also eine stetige in N liegende Linie, die ganz auf der Oberfläche verläuft und die beiden gegebenen Punkte verbindet. Wir geben diesem Resultat die folgende Fassung:

10. *Abgesehen von denjenigen Fällen, wo die Begrenzung einer abgeschlossenen konvexen Punktmenge in zwei parallele Mannigfaltigkeiten zerfällt, besteht die Begrenzung aus einem Stück. Je zwei ihrer Punkte lassen sich durch eine stetige ganz der Begrenzung angehörige und in einer zweidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit gelegene Linie verbinden.*

§ 27. Konvexe Körper.

Unter einem konvexen r-dimensionalen Körper verstehen wir eine r-dimensionale, konvexe, abgeschlossene und absolut beschränkte Punktmenge. Wird die Dimension nicht angegeben, so ist stets ein n-dimensionaler Körper gemeint. — In bezug auf einen konvexen Körper K zerfallen die Punkte des Raumes in drei Arten: *innere Punkte, Oberflächenpunkte* und *äußere*, d. h. K nicht angehörige. Ebenso sind drei Arten linearer Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden: 1) solche, die innere Punkte enthalten und (vom ganzen Raum P abgesehen) *schneidende* heißen sollen, 2) solche, die keinen inneren, aber wenigstens einen Oberflächenpunkt enthalten, 3) solche, die nur äußere Punkte enthalten, und die wir darum *äußere* Mannigfaltigkeiten nennen. — Wenn eine Ebene Λ den Körper K schneidet, also einen inneren Punkt α enthält, so gehört eine gewisse (n-dimensionale) Umgebung von α dem Körper K an, und es liegen daher zu beiden Seiten von Λ Punkte von K. Umgekehrt: Wenn zu beiden Seiten einer Ebene Λ Punkte aus K liegen, so schneidet Λ den Körper. Denn da in jeder Umgebung eines Punktes von K auch

innere Punkte von K liegen, so gibt es unter der gemachten Annahme zwei innere Punkte α, β zu beiden Seiten von Λ. Die Verbindungsstrecke von α und β schneidet dann Λ in einem inneren Punkte. Ist Λ eine äußere Ebene, so muß für den Abstand der Punkte des Körpers von der Ebene Λ eine positive untere Grenze existieren, Λ ist also nicht Stützebene. Eine Ebene gehört also dann und nur dann der unter 2) genannten Kategorie an, wenn sie Stützebene ist. Wir wollen jetzt auch die Mannigfaltigkeiten von weniger als $n-1$ Dimensionen, die dem Falle 2) entsprechen, als *stützende* bezeichnen. — Zu den schneidenden Mannigfaltigkeiten rechnen wir auch die inneren Punkte, zu den stützenden die Oberflächenpunkte.

Über die Beziehungen der Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Arten untereinander gilt zunächst:

1. *Ist Λ_r eine lineare r-dimensionale Mannigfaltigkeit $(r \geqq 1)$ und $s < r$, so gibt es unter den in Λ_r enthaltenen linearen Mannigfaltigkeiten von s Dimensionen,*

a) *wenn Λ_r äußere Mannigfaltigkeit ist, nur äußere,*

b) *wenn Λ_r den Körper stützt, äußere und stützende,*

c) *wenn Λ_r den Körper schneidet, äußere, stützende und schneidende.*

Beweis: Die Behauptung a) versteht sich von selbst; ebenso ist klar, daß Λ_r im Falle b) keine schneidenden Mannigfaltigkeiten enthalten kann, und daß es unter den in Λ_r enthaltenen Mannigfaltigkeiten von s Dimensionen im Falle b) stützende, im Falle c) schneidende gibt. Ist ferner α die Richtung einer in Λ_r liegenden Geraden, N eine äußere Schranke von K nach der Richtung α, so wird Λ_r von der Ebene N in einer äußeren $(r-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit geschnitten, und in dieser ist eine ebensolche von s Dimensionen enthalten. Äußere s-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind also stets vorhanden. Endlich enthält Λ_r im Falle c) innere und äußere, also auch Oberflächenpunkte. Eine durch einen solchen gehende Stützebene schneidet Λ_r in einer stützenden $(r-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die eine ebensolche von s Dimensionen enthält.

Dem Satze 1. steht der folgende dual gegenüber:

2. *Ist Λ_r eine lineare r-dimensionale Mannigfaltigkeit, $0 \leqq r < n-1$ und $n > s > r$, so gibt es unter den durch Λ_r gehenden linearen Mannigfaltigkeiten von s Dimensionen,*

a) *wenn* Λ_r *den Körper schneidet, nur schneidende,*

b) *wenn* Λ_r *den Körper stützt, schneidende und stützende,*

c) *wenn* Λ_r *äußere Mannigfaltigkeit ist, schneidende, stützende und äußere.*

Hier leuchtet unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung a) ein, ferner, daß in jedem Falle schneidende s-dimensionale Mannigfaltigkeiten durch Λ_r gehen und daß im Falle b) durch Λ_r keine äußeren Mannigfaltigkeiten gehen können. Es bleibt noch übrig, im Falle b) stützende, im Falle c) stützende und äußere s-dimensionale Mannigfaltigkeiten durch Λ_r nachzuweisen. Hierzu ist nur der Nachweis stützender bzw. äußerer Ebenen durch Λ_r zu führen. Denn haben wir durch Λ_r eine äußere Ebene Λ_{n-1}, so ist jede durch Λ_r gehende in Λ_{n-1} gelegene Mannigfaltigkeit auch eine äußere; haben wir durch Λ_r eine Stützebene Λ_{n-1}, und ist ω ein Λ_{n-1} und K gemeinsamer Punkt, so ist jede Λ_r und ω enthaltende und in Λ_{n-1} gelegene Mannigfaltigkeit auch eine stützende. — Ist nun $r = 0$, also Λ_r ein Punkt ω, so ist dieser im Falle b) auf der Oberfläche gelegen, und es gibt durch ω wenigstens eine Stützebene. Im Falle c) ist ω äußerer Punkt, und es gibt einen Punkt α des Körpers K, dessen Abstand $|\alpha - \omega|$ ein Minimum ist. Die Ebene N, welche durch ω geht und auf der Verbindungsgeraden von ω und α senkrecht steht, ist dann eine äußere. — Den Fall $r > 0$ führen wir auf den Fall $r = 0$ zurück, indem wir auf Λ_r einen Punkt ω annehmen, der im Falle b) der Oberfläche angehören soll, $\Lambda_r = \omega + \mathsf{M}$ setzen und auf den zu M komplementären Modul M_1 projizieren. Die Projektion K_1 von K ist dann ein konvexer $(n-r)$-dimensionaler Körper, die Projektion von Λ_r ein Punkt ω_1; und jeder Raumpunkt, dessen Projektion ω_1 ist, liegt in Λ_r. Nach § 26, 5. können wir daher schließen, daß im Falle b) ω_1 der Begrenzung von K_1 angehört, während im Falle c) ω_1 äußerer Punkt von K_1 ist. Indem wir die für $r = 0$ erhaltenen Resultate anwenden, schließen wir, daß es unter den durch ω_1 gehenden und in M_1 gelegenen $(n-r-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im Falle b) solche, die K_1 stützen, im Falle c) äußere gibt. Diese Mannigfaltigkeiten sind aber die Projektionen von Ebenen, die durch Λ_r gehen und in bezug auf K stützende bzw. äußere sind. — Es sei B das kleinste K enthaltende Strahlsystem vom Ursprung $\Lambda_r (r \geqq 0)$. B ist konvex und, wenn Λ_r äußere Mannigfaltigkeit ist, auch

abgeschlossen (§ 18). Ist in diesem Falle N eine durch Λ_r gehende in bezug auf K äußere Ebene, so liegt B ganz in dem von N begrenzten Halbraum, dem auch K angehört. B besteht aus allen Halbmannigfaltigkeiten des Ursprungs Λ_r, welche Punkte von K enthalten. Da N keine solchen Punkte enthält, so hat N mit B nur die Punkte von Λ_r gemein, und da N jeden Ursprungspunkt von B enthalten muß, so ist Λ_r der totale Ursprung von B. Ist ferner β ein nicht in Λ_r gelegener Oberflächenpunkt von B, N_1 eine durch β gehende Stützebene von B, so enthält N_1 auch Punkte von K, stellt also eine durch Λ_r gehende Stützebene von K dar. Damit ist der Rest des Satzes 2. erledigt. — Da im Falle b) durch Λ_r eine Stützebene gelegt werden kann, so ist auch in diesem Falle das Strahlsystem B, ebenso wie B′ in einem Halbraum enthalten. Im Falle a) aber kann B keine Stützebene besitzen, da diese durch Λ_r gehen und auch für K Schranke sein müßte, während doch in diesem Falle jede Ebene durch Λ_r den Körper schneidet. Das konvexe System B erfüllt also hier den ganzen Raum P. Somit ergibt sich:

3. *Das kleinste, einen konvexen Körper enthaltende Strahlsystem* B *vom Ursprung* Λ *ist dann und nur dann* $=$ P, *wenn* Λ *den Körper schneidet. Ist die Mannigfaltigkeit* Λ *eine äußere, so stellt sie den totalen Ursprung von* B *dar.*

Die Stützmannigfaltigkeiten Λ des konvexen Körpers K teilen wir nach „*Ordnung*“ und „*Klasse*“ ein. Die Ordnung r bezeichnet die Dimension des Durchschnitts von Λ und K, die Klasse wird $= k$ gesetzt, wenn die Stufe des kleinsten abgeschlossenen, K enthaltenden Strahlsystems vom Ursprung Λ durch $n-1-k$ gegeben wird. Beispielsweise sind bei der Kugel Ordnung und Klasse aller Stützmannigfaltigkeiten $= 0$. Bei einem Polyeder im dreidimensionalen Raum hat man Stützgeraden 0-ter und erster, Stützebenen 0-ter, erster und zweiter Ordnung. Mannigfaltigkeiten zweiter Klasse sind die Ecken, erster Klasse die übrigen auf den Kanten gelegenen Punkte, sowie die Geraden, in denen die Kanten liegen. Bei einem Kreiskegel ist 2 die Ordnung der Grundfläche und die Klasse der Spitze. Die Mantellinien und die in der Ebene des Grundkreises gelegenen und diesen schneidenden Geraden haben die Ordnung 1, die Klasse 0; die Tangenten des Grundkreises und die Geraden, welche mit dem Kegel nur die Spitze gemein haben, haben die Ordnung 0 und die Klasse 1.

§ 28. Relativ innere Punkte, relativ schneidende Mannigfaltigkeiten.

Auch in bezug auf einen r-dimensionalen Körper K_r können wir die sämtlichen linearen Mannigfaltigkeiten Λ des n-dimensionalen Raumes in drei Arten: äußere, d. h. keinen Punkt von K_r enthaltende, stützende und schneidende einteilen. Dabei bezeichnen wir aber — in Übereinstimmung mit der früher für Stützebenen gegebenen Definition — die Mannigfaltigkeit Λ nur dann als schneidend, wenn sie innere Punkte enthält, ohne doch den Körper K_r ganz in sich aufzunehmen. Ist also K_r ganz in Λ enthalten, so soll Λ als Stützmannigfaltigkeit gelten.

In dem Körper K_r sind konvexe Teilkörper (gleicher oder geringerer Dimension) enthalten. Wir sagen, daß die lineare Mannigfaltigkeit Λ den Körper K_r *relativ schneidet*, wenn sie einen konvexen Teilkörper von K_r schneidet. Zu den relativ schneidenden Mannigfaltigkeiten rechnen wir auch die *relativ inneren Punkte*, d. h. diejenigen, welche innere Punkte eines konvexen Teilkörpers sind. Diejenigen Stützmannigfaltigkeiten (Oberflächenpunkte), welche nicht relativ schneiden (keine relativ inneren Punkte sind), bezeichnen wir als *wesentliche Stützmannigfaltigkeiten.*

Beispiel: Beim konvexen Polyeder des dreidimensionalen Raumes sind die wesentlichen Stützmannigfaltigkeiten: die Ecken, diejenigen durch eine Ecke gehenden Geraden, welche sonst keinen Punkt mit dem Körper gemein haben, die Geraden, in denen die Kanten liegen, alle Stützebenen sowie der ganze Raum.

Wir beweisen jetzt:

1. *In bezug auf den r-dimensionalen Körper K_r ist die lineare Mannigfaltigkeit Λ dann und nur dann eine relativ schneidende, wenn von K_r nach Weglassung aller in Λ gelegener Punkte eine nicht konvexe Punktmenge zurückbleibt.*

Es sei nämlich Σ das (eventuell leere) System der Punkte, welche zu K_r nicht aber zu Λ gehören. Wenn Λ den Körper relativ schneidet, so enthält Λ einen Punkt α von K_r, von dem eine gewisse, etwa r_1-dimensionale Umgebung zu K_r gehört, ohne ganz in Λ zu liegen. In dieser Umgebung kann man durch α eine Strecke ziehen, die in K_r liegt und mit Λ nur den Punkt α gemein hat. Sind β, γ zwei Punkte dieser Strecke zu beiden Seiten von α, so gehören β und γ zu Σ, während α nicht zu Σ gehört. Σ ist also nicht konvex. Wird andererseits Σ als nicht konvex

vorausgesetzt, so kann man in Σ zwei Punkte β, γ finden, deren Verbindungsstrecke einen nicht zu Σ gehörigen Punkt α enthält. Die Strecke stellt dann einen eindimensionalen Teilkörper von K_r dar, welcher in α von Λ geschnitten wird; Λ ist also bezüglich K_r relativ schneidend.

Es bezeichne wieder K_r einen r-dimensionalen konvexen Körper. ω sei relativ innerer Punkt „*p-ten Grades*“ $(p > 0)$, d. h. innerer Punkt eines p-dimensionalen Teilkörpers K_p, aber keines Teilkörpers von mehr als p Dimensionen. Ist γ ein beliebiger Punkt der durch K_p bestimmten linearen p-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\Lambda_p = Ln.\,\mathsf{K}_p$, und sind α, β zwei Punkte einer durch γ gehenden, nicht in Λ_p gelegenen Geraden zu beiden Seiten des Punktes γ, so wird durch Λ_p und diese Gerade eine lineare $(p+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ_{p+1} bestimmt, welche durch Λ_p in zwei Halbmannigfaltigkeiten, die eine α, die andere β enthaltend, geteilt wird. Das Strahlsystem des Ursprungs ω, welches aus den sämtlichen in Λ_p gelegenen und den beiden durch α bzw. β gehenden Strahlen dieses Ursprungs besteht, ist innerhalb Λ_{p+1} allseitig. Würden die Punkte α und β beide zu K_r gehören, so läge auf jedem Strahl des genannten Systems ein von ω verschiedener Punkt dieses Körpers und ω wäre innerer Punkt eines in Λ_{p+1} gelegenen $(p+1)$-dimensionalen Teilkörpers. Da dies gegen die Voraussetzung ist, so kann eine eindimensionale und daher auch eine mehrdimensionale Umgebung eines Punktes γ aus Λ_p nur dann dem Körper K_r angehören, wenn sie ganz in Λ_p liegt. Damit ist auch (indem wir dies Ergebnis für den Fall $\gamma = \omega$ anwenden) gezeigt, daß Λ_p durch ω eindeutig bestimmt ist, und daß in Λ_p kein relativ innerer Punkt von höherem als p-tem Grade liegen kann. Verstehen wir jetzt unter K_p den konvexen p-dimensionalen Teilkörper, der den Durchschnitt von K_r und Λ_p darstellt, und ziehen wir durch ω in Λ_p eine Gerade, so enthält diese zwei Punkte α_1, β_1 der Begrenzung von K_p. α_1 und β_1 sind Häufungspunkte nicht zu K_r gehöriger Punkte aus Λ_p, also, wenn überhaupt relativ innere Punkte, so höchstens vom Grade $p-1$. ω liegt demnach zwischen zwei Punkten α_1, β_1, deren jeder entweder wesentlicher Begrenzungspunkt von K_r oder relativ innerer Punkt kleineren als p-ten Grades ist. Ist daher K_0 das System der wesentlichen Begrenzungspunkte von K_r, so wird $\overline{\mathsf{K}_0} = \mathsf{K}_r$. Da ferner nach Weglassung eines wesentlichen Begrenzungspunktes von K_r eine konvexe Punktmenge zurückbleibt (Satz 1.), so erhalten wir den Satz:

2. *Ist* K_0 *das System der wesentlichen Begrenzungspunkte eines konvexen (r-dimensionalen) Körpers* K, *so ist* $\overline{\mathsf{K}}_0 = \mathsf{K}$. *Eine Punktmenge* A *genügt dann und nur dann der Bedingung* $\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{K}$, *wenn sie in* K *enthalten ist und* K_0 *enthält.*

§ 29. Tangenten eines konvexen Körpers.

Es sei K ein n-dimensionaler konvexer Körper. Eine lineare Mannigfaltigkeit Λ soll eine *relativ äußere* in bezug auf K heißen, wenn es ein konvexes, abgeschlossenes und K enthaltendes Strahlsystem A von der Beschaffenheit gibt, daß Λ mit A entweder keinen Punkt oder nur Ursprungspunkte gemein hat, ohne jedoch ganz dem totalen Ursprung anzugehören.

Es sei Λ eine relativ äußere Mannigfaltigkeit und A ein Strahlsystem der eben bezeichneten Art. A kann dann keinen inneren Punkt von K zum Ursprung haben, sonst wäre $\mathsf{A} = \mathsf{P}$. Es wäre dann P der totale Ursprung von A, und also Λ in diesem enthalten, gegen die Voraussetzung. Da ferner jeder Punkt von K auch A angehört, jeder gemeinsame Punkt von A und Λ aber Ursprung von A ist, so kann Λ überhaupt keinen inneren Punkt von K enthalten. Eine schneidende Mannigfaltigkeit kann also keine relativ äußere sein. — Dagegen ist jede äußere Mannigfaltigkeit Λ auch eine relativ äußere. Denn wir können in diesem Falle durch Λ eine äußere Ebene M und zu dieser eine Parallelebene N so legen, daß M von K durch N getrennt wird. Der von N begrenzte K enthaltende Halbraum stellt dann ein konvexes, abgeschlossenes, K enthaltendes Strahlsystem dar, das mit Λ keinen Punkt gemein hat.

Was nun aber die Stützen von K anlangt, so können unter diesen relativ äußere und nicht relativ äußere vorkommen. Die nicht relativ äußeren Stützen eines konvexen Körpers K nennen wir *Tangenten* von K, und die folgenden Betrachtungen werden diese Bezeichnung rechtfertigen.

1. *Jeder Oberflächenpunkt* ω *eines konvexen Körpers* K *gehört zu den Tangenten.*

Denn nach den früher gegebenen Definitionen ist ω den Stützen beizuzählen. Ferner gehört ω jedem Strahlsystem A an, welches K enthält, ist also entweder im Ursprung von A enthalten oder hat mit A einen Punkt, nämlich ω, gemein, der nicht dem Ursprung angehört. ω ist also keine relativ äußere Mannigfaltigkeit.

2. *Der ganze Raum* P *gehört zu den Tangenten.*

Denn er ist Stütze von K. Ferner muß ein K enthaltendes Strahlsystem A, wenn es nur Ursprungspunkte mit P gemein hat, ganz aus solchen Punkten bestehen und, da es innere Punkte von K enthält, mit P identisch sein. Dann ist aber P auch Ursprung von A, also im Ursprung von A enthalten, mithin keine relativ äußere Mannigfaltigkeit.

3. *Durch jede r-dimensionale Tangente Λ_r $(0 \leqq r < n)$ von* K *lassen sich $(r+1)$-dimensionale Tangenten legen. Ist $r \leqq n-2$ und* B *das kleinste konvexe und abgeschlossene* K *enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ_r, so sind die durch Λ_r gehenden $(r+1)$-dimensionalen Tangenten von* K *identisch mit denjenigen $(r+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche außer Λ_r noch wenigstens einen Oberflächenpunkt von* B *enthalten.*

Beweis: Im Falle $r = n-1$ ist die einzige durch Λ_r gehende $(r+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit P eine Tangente (Satz 2.). Nehmen wir nun $r < n-1$ an. Das in unserem Satze mit B bezeichnete Strahlsystem erfüllt nicht den ganzen Raum und ist abgeschlossen und n-dimensional, besitzt also eine Oberfläche Φ. Ist B Halbraum, so ist Φ eine Ebene, anderenfalls wird $\bar{\Phi} = \mathsf{B}$; in keinem Falle kann Φ in Λ_r enthalten sein. Es gibt also Oberflächenpunkte von B auch außerhalb Λ_r. Ist K_1 das System der inneren Punkte von K, B_1 das kleinste K_1 enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ_r, so ist $\mathsf{K}_1' = \mathsf{K}$. Wie man nacheinander ersieht, enthält B die Punktmengen K, K_1, B_1, B_1', während andererseits $\mathsf{K}_1' = \mathsf{K}$ und daher auch B in B_1' enthalten sein muß. Es wird also $\mathsf{B}_1' = \mathsf{B}$. Daraus folgt (§ 26, 4.), daß jeder innere Punkt von B zu B_1 gehört. Nun besteht aber B_1 aus denjenigen Halbmannigfaltigkeiten des Ursprungs Λ_r, welche innere Punkte von K enthalten. Bezeichnen wir also jetzt mit Λ_{r+1} eine durch Λ_r gehende lineare Mannigfaltigkeit von $r+1$ Dimensionen, so wird diese, wenn sie innere Punkte von B enthält, auch innere Punkte von K enthalten, also nicht Tangente sein. Hat die Mannigfaltigkeit Λ_{r+1} mit B nur die Punkte von Λ_r gemein, so ist sie eine relativ äußere, also ebenfalls keine Tangente. Wenn wir von diesen beiden Fällen absehen, so muß Λ_{r+1} einen nicht in Λ_r gelegenen Punkt der Oberfläche von B enthalten. — Wir wollen jetzt annehmen, daß Λ_{r+1} in der Tat einen solchen Oberflächenpunkt ω enthält, und nachweisen, daß alsdann Λ_{r+1} Tangente von K ist. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst einen von ω ver-

schiedenen Punkt η in Λ_{r+1} und nehmen auf der Verbindungsgeraden von ω und η den Punkt ζ so an, daß ω zwischen η und ζ liegt und ζ der durch ω bestimmten Halbmannigfaltigkeit des Ursprungs Λ_r angehört. Dann gehört ζ zu B. η kann nicht innerer Punkt von B sein, da sonst auch ω innerer Punkt wäre (§ 26, 2.), also besitzt Λ_{r+1} keinen inneren Punkt von B oder K. Wir haben noch zu zeigen, daß Λ_{r+1} keine relativ äußere Mannigfaltigkeit ist. Dazu betrachten wir ein konvexes, abgeschlossenes, K enthaltendes Strahlsystem A und nehmen an, daß Λ_{r+1} mit A nur Ursprungspunkte gemein hat. Dann hat auch die Mannigfaltigkeit Λ_r mit A nur solche Punkte gemein und muß, da sie keine relativ äußere ist, ganz dem Ursprung von A angehören. Da nun B das kleinste abgeschlossene und K enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ_r ist, so ist B Teil von A. A hat demnach mit Λ_{r+1} alle Punkte von Λ_r sowie ω gemein. Alle diese Punkte gehören daher nach unserer Annahme dem totalen Ursprung von A an, und daher ist auch die durch Λ_r und ω bestimmte lineare Mannigfaltigkeit Λ_{r+1} ganz in diesem Ursprung enthalten (§ 18). Damit ist der geforderte Nachweis erbracht und Satz 3. bewiesen.

4. *Sind Λ_r, Λ_s Tangenten des konvexen Körpers* K, *r und s ihre Dimensionen, ist $s \geqq r+2$ und Λ_r in Λ_s gelegen, so gibt es Tangenten Λ_{r+1} von $r+1$ Dimensionen, die durch Λ_r gehen und in Λ_s liegen.*

Denn, wenn B das kleinste abgeschlossene K enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ_r ist, so kann die Mannigfaltigkeit Λ_s keinen inneren Punkt von B enthalten; sie muß ferner, da sie keine relativ äußere ist, mit B einen Punkt ω gemein haben, der nicht in Λ_r liegt. ω und Λ_r bestimmen dann eine $(r+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ_{r+1}, die in Λ_s liegt und nach Satz 3. Tangente von K ist.

Aus den Sätzen 1. bis 4. folgt, wenn man noch berücksichtigt, daß jede Tangente wenigstens einen Oberflächenpunkt enthält: Durch eine (In einer) r-dimensionale(n) Tangente gehen (liegen) Tangenten aller Dimensionen $> r$ $(< r)$.

Beispiele. 1) Tangenten einer Kugel K sind diejenigen Geraden und Ebenen, die mit K genau einen Punkt gemein haben.

2) Bei einem Kreiskegel treten als Tangentialebenen auf: die Ebene des Grundkreises und diejenigen Ebenen, die mit dem Kegel eine und nur eine Mantellinie gemein haben. Tangierende Geraden sind diejenigen,

welche in einer Tangentialebene liegen und mit dem Kegel mindestens einen von der Spitze verschiedenen Punkt gemein haben.

3) Es sei K_1 eine Kugel, Λ eine Ebene, die K_1 schneidet, aber nicht durch den Mittelpunkt geht, K_2 das Spiegelbild von K_1 an der Ebene Λ, K der Durchschnitt von K_1 und K_2. — Hier sind Tangenten von K die Tangenten von K_1 und K_2, soweit sie einen Punkt von K enthalten. Es gehen also durch jeden Punkt des Kreises, in dem sich die Oberflächen von K_1 und K_2 schneiden, zwei Tangentialebenen von K, während durch jeden anderen Oberflächenpunkt von K eine geht.

Ist K_r ein konvexer Körper von r Dimensionen, $\Lambda_r = Ln.\ \mathsf{K}_r$, so sind die Begriffe „relativ äußere Mannigfaltigkeit“ und „Tangente“, soweit es sich um Mannigfaltigkeiten in Λ_r handelt, genau wie im Falle $r = n$ zu definieren. Eine beliebige lineare Mannigfaltigkeit Λ heißt relativ äußere bzw. Tangente, wenn ihr Durchschnitt mit Λ_r relativ äußere Mannigfaltigkeit bzw. Tangente ist.

Es sei K ein konvexer n-dimensionaler Körper, ω ein innerer Punkt. Da auf jeder Verbindungsstrecke von ω mit einem äußeren Punkte ein Oberflächenpunkt liegt und durch diesen wenigstens eine Tangentialebene geht, so besteht K aus allen Punkten, die von ω durch keine Tangentialebene getrennt werden. — Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Anzahl der Tangentialebenen endlich ist. γ sei ein Oberflächenpunkt, Σ_1 das System der durch γ gehenden, Σ_2 das der übrigen Tangentialebenen, d der kürzeste der Abstände des Punktes γ von den Ebenen aus Σ_2. Wenn die Ebenen des Systems Σ_1 nicht nur den Punkt γ, also wenigstens eine durch γ gehende Gerade gemein haben, so tragen wir auf einer solchen Geraden von γ aus nach beiden Seiten ein Stück $< d$ ab und gelangen so zu zwei Punkten α, β. γ wird von keinem der Punkte α, β, ω durch eine Ebene aus Σ_2 getrennt. Die von ω nach α und β gehenden Strecken werden daher von keiner der Ebenen aus Σ_2 geschnitten; und da sie die Ebenen aus Σ_1 sämtlich erst in den Endpunkten α, β schneiden, so gehören diese Endpunkte dem Körper an, und der zwischen α und β gelegene Punkt γ ist also ein relativ innerer. Geht man umgekehrt davon aus, γ als einen relativ inneren Oberflächenpunkt vorauszusetzen, so gibt es eine zu K gehörige Umgebung von γ; und da diese von keiner der Ebenen aus Σ_1 geschnitten werden kann, so muß sie ganz allen diesen

Ebenen angehören. Damit γ ein wesentlicher Oberflächenpunkt sei, ist also notwendig und hinreichend, daß er durch die durch ihn gehenden Tangentialebenen eindeutig bestimmt ist. Daraus folgt, daß auch nur endlichviele wesentliche Punkte vorhanden sind. — Wir gehen jetzt von der Voraussetzung aus, daß nur endlichviele wesentliche Oberflächenpunkte existieren. Es sei dann Λ eine Stützebene, K_1 das System der in Λ gelegenen, K_2 das der übrigen wesentlichen Punkte. $\overline{\mathsf{K}}_1$ ist in Λ enthalten, während $\overline{\mathsf{K}}_2$ keinen Punkt mit Λ gemein hat. Daher ist K weder $= \overline{\mathsf{K}}_1$ noch $= \overline{\mathsf{K}}_2$, woraus nach § 28, 2. folgt, daß keins der Systeme K_1, K_2 leer ist. Es sei $\Lambda_1 = Ln.\,\mathsf{K}_1$, B das kleinste $\overline{\mathsf{K}}_2$ enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ_1. B ist konvex und abgeschlossen (§ 21, 4., § 18) und enthält K_1 und K_2, also auch K. B besteht aus allen Halbmannigfaltigkeiten des Ursprungs Λ_1, die Punkte von $\overline{\mathsf{K}}_2$ enthalten. Da Λ keinen solchen Punkt enthält, so hat Λ mit B nur die Punkte des Ursprungs Λ_1 gemein. Ist daher Λ_1 nur ein echter Teil von Λ, so ist Λ eine relativ äußere Stützebene. Ist ferner A irgend ein konvexes abgeschlossenes und K enthaltendes Strahlsystem, welches mit Λ nur Ursprungspunkte gemein hat, so muß, da zu den gemeinsamen Punkten auch die Punkte aus K_1 gehören, auch die durch K_1 bestimmte lineare Mannigfaltigkeit Λ_1 dem Ursprung von A angehören. Im Falle $\Lambda_1 = \Lambda$ gehört daher Λ dem totalen Ursprung jedes solchen Strahlsystems an, ist also Tangentialebene. Eine Stützebene ist also dann und nur dann Tangentialebene, wenn sie als kleinste lineare Mannigfaltigkeit der in ihr gelegenen wesentlichen Punkte von K bestimmt ist. Daraus folgt, daß die Anzahl der Tangentialebenen endlich ist. Somit sehen wir:

5. *Die konvexen Körper mit endlichvielen wesentlichen Punkten sind identisch mit denen, die endlichviele Tangentialebenen haben.*

Diese Körper heißen *konvexe Polyeder*. Die wesentlichen Punkte des Polyeders heißen seine Ecken, die Tangentialebenen kurz Polyederebenen.

Es sei K ein konvexes n-dimensionales Polyeder, Λ eine Ebene des Polyeders, K_1 das System der in Λ liegenden Ecken, K_2 das System aller nicht in Λ gelegenen Punkte von K. $\overline{\mathsf{K}}_1$ und K_2 sind konvexe Punktmengen; und dasselbe gilt von der aus $\overline{\mathsf{K}}_1$ und K_2 zusammen gebildeten Punktmenge, weil jeder Punkt einer Strecke, die einen Punkt α aus $\overline{\mathsf{K}}_1$ mit einem

Punkt β aus K_2 verbindet, zu K also, von α selbst abgesehen, zu K_2 gehört. Diese aus $\overline{\mathsf{K}}_1$ und K_2 zusammengesetzte konvexe Punktmenge enthält alle Ecken von K, ist also mit K identisch. $\overline{\mathsf{K}}_1$ stellt daher das System aller in Λ gelegenen Punkte von K dar und wird auch *Polyederfläche* genannt. Da die Ebene Λ durch die Punkte aus K_1 eindeutig bestimmt ist und jeder Punkt aus K_1, wie sofort zu sehen, auch in bezug auf $\overline{\mathsf{K}}_1$ wesentlich ist, so ist die Polyederfläche $\overline{\mathsf{K}}_1$ als ein $(n-1)$-dimensionales konvexes Polyeder mit dem Eckensystem K_1 anzusehen. Da durch jeden Oberflächenpunkt eines konvexen Körpers wenigstens e i n e Tangentialebene geht, und bei den konvexen Polyedern die Tangentialebenen mit den Polyederebenen identisch sind, so gehört jeder Oberflächenpunkt wenigstens e i n e r Polyederfläche an. Ist er innerer Punkt einer Polyederfläche, so ist er relativ innerer Punkt vom Grade $n-1$, sonst von geringerem Grade. Weil ferner durch einen relativ inneren Punkt vom Grade p die p-dimensionale Mannigfaltigkeit, in welcher eine p-dimensionale zum Körper gehörige Umgebung des Punktes liegt, eindeutig bestimmt ist, so kann ein innerer Punkt einer Polyederfläche auf keiner zweiten liegen. Die Polyederflächen heißen auch die $(n-1)$-dimensionalen *Grenzgebilde* des konvexen Polyeders K. Da jede von ihnen ein $(n-1)$-dimensionales konvexes Polyeder darstellt, so wird ihre Begrenzung von einer endlichen Anzahl $(n-2)$-dimensionaler Grenzgebilde zusammengesetzt. Auf diese Weise gelangt man zu einer endlichen Anzahl von Grenzgebilden der Dimensionen $n-1$, $n-2$, ... 1, 0, wobei sich ohne weiteres ergibt, daß jeder relativ innere Punkt k-ten Grades von K innerer Punkt eines bestimmten k-dimensionalen Grenzgebildes ist. Die Grenzgebilde von der Dimension 0 sind die Ecken des Polyeders. — Die (k-dimensionalen) linearen Mannigfaltigkeiten, in denen die (k-dimensionalen) Grenzgebilde liegen, lassen sich in verschiedener Weise charakterisieren: z. B. als diejenigen Mannigfaltigkeiten, bei denen die Ordnung (§ 27) gleich der Dimension ist, und zugleich Klasse und Dimension sich zu $n-1$ ergänzen; oder auch als diejenigen Mannigfaltigkeiten, die zugleich wesentlich und tangierend sind. Der einfache Beweis für diese Angaben möge übergangen werden. Weiter gehen wir auf die Theorie der konvexen Polyeder nicht ein; es sollte hier nur kurz die Stellung gekennzeichnet werden, die sie unter den allgemeinen konvexen Körpern einnehmen.

VII. Die konvexen Gebilde der projektiven Geometrie.

§ 30. Grundbegriffe der projektiven Geometrie.

In der Geometrie des dreidimensionalen projektiven Raumes pflegt man neben dem Punkt noch Gerade und Ebene als *Elemente* einzuführen, welche Elemente wohl von den in ihnen gelegenen Punktmengen unterschieden werden, die wir bisher mit diesen Namen bezeichneten. In der mehrdimensionalen projektiven Geometrie hat man eine entsprechend größere Anzahl verschiedenartiger Elemente, die wir als Elemente von verschiedenem „*Index*“ unterscheiden wollen, derart, daß „Element vom Index 1“ mit „Punkt“, „Element vom Index 2“ mit „Gerade“ gleichbedeutend ist, usf. Zur analytischen Behandlung verwenden wir wieder das System P komplexer Zahlen mit n Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$, das uns aber jetzt zur Darstellung der Geometrie eines projektiven Raumes von $n-1$ Dimensionen dient. Jedem Modul, dessen Rang $r \geqq 1$ ist, entspricht ein Element vom Index r, das wir ebenso wie den Modul bezeichnen, und umgekehrt. Das Element A liegt in dem Element B (B geht durch A), wenn der Modul A im Modul B enthalten ist. Dem aus der Zahl 0 allein bestehenden Modul, den wir auch mit 0 bezeichnen, entspricht kein Element. Einen Punkt bezeichnen wir auch durch eine komplexe von 0 verschiedene Zahl, welche die Basis des zugehörigen Moduls repräsentiert und demnach nur bis auf einen reellen Faktor bestimmt ist.

Der Durchschnitt zweier Moduln A, B soll mit (A, B), der kleinste A und B enthaltende Modul mit [A, B] bezeichnet werden. Zwischen den Rängen a, b, c, d der Moduln A, B, $\Gamma = [A, B]$, $\Delta = (A, B)$ besteht die Beziehung

$$a + b = c + d$$

(§ 2). Ist $a > 0$, $b > 0$, also auch $c > 0$, so heißt das Element Γ die *Verbindung* (das Verbindungselement) der Elemente A und B. Ist auch $d > 0$, so heißt das Element Δ der *Schnitt* von A und B. Im Falle $d = 0$ haben A und B keinen Punkt gemein.

Ist der Modul A im Modul Γ enthalten, so bezeichnen wir mit $\{A, \Gamma\}$ das System der zwischen A und Γ gelegenen, d. h. A enthaltenden und in Γ enthaltenen Moduln oder auch der zugehörigen Elemente; ferner, wenn $a \geqq 0$ der Rang von A, $c = a + r + 1$ der Rang von Γ, $r \geqq 1$ ist, mit

$|\mathsf{A}, \Gamma|_1$ und $|\mathsf{A}, \Gamma|_2$ das System der durch A gehenden*) und in Γ gelegenen Elemente vom Index $a+1$ bzw. $c-1$. $|\mathsf{A}, \Gamma|_1$ und $|\mathsf{A}, \Gamma|_2$ heißen *r-dimensionale lineare (projektive) Systeme erster* bzw. *zweiter Art.* Für $r=1$ werden beide Systeme identisch, fällt also die Unterscheidung zweier Arten von Systemen fort. — Als Beispiel nehmen wir den dreidimensionalen Raum ($n=4$). Hier gibt es drei eindimensionale lineare Systeme: Punktreihe ($a=0,\ c=2$), Geradenbüschel ($a=1,\ c=3$), Ebenenbüschel ($a=2,\ c=4$); ferner zwei zweidimensionale Systeme erster Art: System der Punkte einer Ebene ($a=0,\ c=3$), Geradenbündel ($a=1,\ c=4$); zwei zweidimensionale Systeme zweiter Art: System der Geraden einer Ebene ($a=0,\ c=3$), Ebenenbündel ($a=1,\ c=4$); endlich, dem Falle $a=0,\ c=4$ entsprechend, ein dreidimensionales System erster und eins zweiter Art: das System aller Punkte bzw. aller Ebenen des Raumes.

Bestehen zwischen den Moduln $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ die Relationen

$$(1.) \qquad [\mathsf{A}, \mathsf{B}] = \Gamma, \quad (\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \Delta,$$

so lassen sich die beiden Systeme $|\mathsf{A}, \Gamma|$ und $|\Delta, \mathsf{B}|$ in eine sehr einfache eineindeutige Beziehung zu einander setzen. Ist nämlich M ein Modul aus $|\mathsf{A}, \Gamma|$, und wird

$$(2.) \qquad (\mathsf{M}, \mathsf{B}) = \mathsf{N}, \quad [\mathsf{N}, \mathsf{A}] = \mathsf{M}_1$$

gesetzt, so ergibt sich sofort, daß N dem System $|\Delta, \mathsf{B}|$ angehört, und hieraus wieder, daß M_1 im System $|\mathsf{A}, \Gamma|$ vorkommt. Zufolge der ersten Gleichung (2.) ist N, und der Voraussetzung nach auch A in M enthalten. Die zweite Gleichung (2.) zeigt jetzt, daß auch M_1 Teil von M sein muß. Ferner ergeben sich ohne weiteres die Gleichungen

$$(3.) \qquad [\mathsf{M}, \mathsf{B}] = \Gamma, \quad (\mathsf{N}, \mathsf{A}) = \Delta.$$

Aus (1.), (2.), (3.) folgt, wenn mit a, b, c, d, m, n, m_1 die Ränge der Moduln $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta, \mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{M}_1$ bezeichnet werden,

$$a+b=c+d, \quad m+b=c+n, \quad n+a=m_1+d,$$

$$m_1-n=a-d=c-b=m-n, \quad m_1=m$$

also, da M_1 Teil von M ist, $\mathsf{M}_1=\mathsf{M}$. Die Gleichungen

---

*) Die Worte „der durch A gehenden“ haben natürlich nur einen Sinn, wenn $a>0$ ist, im Falle $a=0$ sind sie einfach zu streichen. Dies gilt auch fernerhin, wo wir es nicht mehr ausdrücklich bemerken werden. $\{0, \Gamma\}_1$ bedeutet also das System der in Γ gelegenen Punkte, $\{0, \Gamma\}_2$ das System der in Γ gelegenen Elemente vom Index r, wenn $r+1$ der Index von Γ ist.

$$(\mathsf{M}, \mathsf{B}) = \mathsf{N},\ [\mathsf{N}, \mathsf{A}] = \mathsf{M}$$

zeigen, daß zwischen $|\mathsf{A}, \Gamma|$ und $|\Delta, \mathsf{B}|$ eine eindeutige Korrespondenz besteht, bei welcher jedes Element N (bzw. M) des zweiten (ersten) Systems aus dem entsprechenden M (N) des ersten (zweiten) erhalten wird, indem man dieses mit B (A) zum Schnitt bringt (verbindet). Die Differenz $m - n$ bleibt, während M und N die Systeme durchlaufen, konstant $= a - d = c - b$. Die Korrespondenz heißt *Perspektivität*; sie geht, wenn A in B enthalten ist, in die identische Transformation des Systems $|\mathsf{A}, \mathsf{B}|$ über.

Zur Darstellung der Lehre von den Kollineationen und Korrelationen brauchen wir einige Sätze über lineare Funktionen (§ 3). Durch eine solche Funktion $\varphi(\xi)$ werden die Zahlen eines Moduls Γ in Zahlen übergeführt, die wieder einen Modul Γ_1 bilden. Wir setzen $\Gamma_1 = \varphi(\Gamma)$. Sind A, B beliebige Moduln, so stellt $\alpha + \beta$, wenn man für α jede Zahl aus A, für β jede Zahl aus B setzt, nur Zahlen des Moduls $[\mathsf{A}, \mathsf{B}]$ und jede Zahl dieses Moduls wenigstens einmal dar. $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $\varphi(\alpha + \beta)$ durchlaufen also die Moduln $\varphi(\mathsf{A})$, $\varphi(\mathsf{B})$, $[\varphi(\mathsf{A}), \varphi(\mathsf{B})]$, $\varphi([\mathsf{A}, \mathsf{B}])$. Da aber $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ ist, so folgt

$$\varphi([\mathsf{A}, \mathsf{B}]) = [\varphi(\mathsf{A}), \varphi(\mathsf{B})].$$

Ist Γ ein Modul vom Range c, c_1 der Rang des Moduls $\Gamma_1 = \varphi(\Gamma)$, so ist $c \geqq c_1$. Andererseits kann man, wenn zwei Moduln Γ, Γ_1 mit den Rängen $c, c_1 \leqq c$ gegeben sind, stets lineare Funktionen finden, die Γ in Γ_1 überführen. Denn wenn $\gamma_1, \dots \gamma_c$ eine Basis von Γ, $\gamma'_1, \dots \gamma'_c$ eine Basis von Γ_1 ist, so kann man, da eine lineare Funktion an n linear unabhängigen Stellen willkürlich vorgeschrieben werden darf, verfügen, daß $\varphi(\gamma_i) = \gamma'_i$ werden soll. Dann aber wird $\varphi(\Gamma) = \Gamma_1$. Im Falle $c = c_1$ ist die durch $\varphi(\xi)$ vermittelte Abbildung von Γ auf Γ_1 eindeutig umkehrbar, und auch diese Umkehrung wird durch eine lineare Funktion vermittelt. $\varphi(\xi)$ verschwindet in diesem Falle innerhalb Γ nur an der Stelle $\xi = 0$. Ist aber $c_1 < c$, so besteht zwischen $\gamma'_1, \dots \gamma'_c$ eine lineare Relation $a_1\gamma'_1 + \dots + a_c\gamma'_c = 0$; es wird

$$0 = a_1\gamma'_1 + \dots + a_c\gamma'_c = \varphi(a_1\gamma_1 + \dots + a_c\gamma_c),\ a_1\gamma_1 + \dots + a_c\gamma_c \neq 0;$$

$\varphi(\xi)$ besitzt also in Γ von 0 verschiedene Nullstellen. In jedem Falle werden diese Nullstellen einen Modul Δ bilden. Ist d der Rang von Δ, so kann man eine Basis von Δ durch Hinzufügen von $c - d$ Zahlen zu einer

Basis von Γ ergänzen. Diese $c-d$ Zahlen bilden dann die Basis eines Moduls Z vom Range $c-d$, für welchen die Relationen

$$[\Delta, \mathsf{Z}] = \Gamma, \ (\Delta, \mathsf{Z}) = 0$$

gelten. Da Δ alle Nullstellen umfaßt, die $\varphi(\xi)$ in Γ besitzt, so zeigt die zweite dieser Relationen, daß $\varphi(\xi)$ in Z nur an der Stelle $\xi = 0$ verschwindet, also $\varphi(\mathsf{Z})$ denselben Rang wie Z, d. i. $c-d$, hat. Zufolge der ersten Relation wird

$$\Gamma_1 = \varphi(\Gamma) = \varphi([\Delta, \mathsf{Z}]) = [\varphi(\Delta), \varphi(\mathsf{Z})] = [0, \varphi(\mathsf{Z})] = \varphi(\mathsf{Z}).$$

Also ist $c-d$ der Rang von Γ_1. D. h. *die Rangdifferenz von* Γ *und* $\varphi(\Gamma)$ *ist gleich dem Range des Moduls, den die in* Γ *liegenden Nullstellen von* $\varphi(\xi)$ *bilden.*

Es sei Γ ein beliebiger Modul, $\varphi(\xi)$ eine lineare Funktion, die wir uns zunächst nur für die Zahlen des Moduls Γ definiert denken, Δ der von den Nullstellen von $\varphi(\xi)$ gebildete Modul. Ist A ein Teilmodul von Γ, so stellt (Δ, A) das System der in A enthaltenen Nullstellen von $\varphi(\xi)$ dar. Die Rangdifferenz zwischen Γ und $\varphi(\Gamma)$ ist gleich dem Range von Δ, die zwischen A und $\varphi(\mathsf{A})$ gleich dem Range von (Δ, A), also höchstens und nur dann gleich jener Rangdifferenz, wenn A den Modul Δ enthält, also dem System $\{\Delta, \Gamma\}$ angehört. Ist A_1 ein Teilmodul von $\Gamma_1 = \varphi(\Gamma)$, so konstituieren die Zahlen ξ aus Γ, für welche $\varphi(\xi)$ zu A_1 gehört, wiederum einen Modul A aus dem System $\{\Delta, \Gamma\}$. Da $\varphi(\xi)$ auch jeden Wert aus A_1 wirklich annimmt, wird $\varphi(\mathsf{A}) = \mathsf{A}_1$. Andererseits enthält jeder Modul A des Systems $\{\Delta, \Gamma\}$ auch stets alle die Zahlen ξ, für die $\varphi(\xi)$ zu $\varphi(\mathsf{A})$ gehört. Denn zu jeder solchen Zahl ξ muß es in A eine Zahl α geben, für welche $\varphi(\xi) = \varphi(\alpha)$ wird. Daraus folgt aber $\varphi(\xi - \alpha) = \varphi(\xi) - \varphi(\alpha) = 0$, und somit $\xi = \alpha + \delta$, wo δ eine Zahl aus Δ bezeichnet. Da aber A den Modul Δ enthält, so ist ξ selbst eine Zahl aus A. — Die Funktion $\varphi(\xi)$ vermittelt also eine eindeutig umkehrbare Korrespondenz zwischen den Moduln der Systeme $\{\Delta, \Gamma\}$ und $\{0, \varphi(\Gamma)\}$. Ist A irgend ein Modul (Element) aus $\{\Delta, \Gamma\}$, so werden bei dieser Korrespondenz die beiden Systeme $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ und $\{\varphi(\mathsf{A}), \varphi(\Gamma)\}$ aufeinander eindeutig abgebildet. Diese Abbildung wird *Kollineation* genannt. — *Damit eine lineare Funktion* φ *eine Kollineation zwischen den Systemen* $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ *und* $\{\varphi(\mathsf{A}), \varphi(\Gamma)\}$ *vermittele, ist* demnach *notwendig und hinreichend, daß alle in* Γ *vorkommenden Nullstellen von* $\varphi(\xi)$ *auch in* A *enthalten sind, oder auch, daß die Rangdifferenz zwischen*

Γ *und* $\varphi(\Gamma)$ *gleich der zwischen* A *und* $\varphi(\mathsf{A})$ *ist. Während* M *das System* $|\mathsf{A}, \Gamma|$ *durchläuft, bleibt die Rangdifferenz zwischen* M *und* $\varphi(\mathsf{M})$ *konstant.* — Sind c, c_1 die Ränge der Moduln Γ, $\Gamma_1 = \varphi(\Gamma)$, ist $c < n$ und P_1 ein Γ_1 enthaltender Modul vom Range $c_1 + n - c$, so kann man eine Basis von Γ durch Hinzufügung von $n-c$ unabhängigen Zahlen $\gamma_1, \dots \gamma_{n-c}$ zu einer Basis des Systems P aller komplexen Zahlen, eine Basis von Γ_1 durch Hinzufügung von $n-c$ unabhängigen Zahlen $\gamma_1', \dots \gamma_{n-c}'$ zu einer Basis von P_1 erweitern. Sodann kann man die bisher nur innerhalb Γ definierte Funktion φ als lineare Funktion über das ganze System P ausdehnen, indem man verfügt, daß $\varphi(\gamma_i) = \gamma_i' \, (i = 1, \dots n-c)$ sein soll. Durch $\varphi(\xi)$ wird dann das System $|\Delta, \mathsf{P}|$ auf das System $|0, \mathsf{P}_1|$ kollinear abgebildet. *Man kann* also *jede Kollineation als Teil einer Kollineation betrachten, die zwischen zwei Systemen von der Form* $|\Delta, \mathsf{P}|$ *und* $|0, \mathsf{P}_1|$ *besteht.*

Sind B, B_1 Moduln gleichen Ranges $r+1$, so lassen sich $|0, \mathsf{B}|$ und $|0, \mathsf{B}_1|$ kollinear aufeinander beziehen. Um eine bestimmte Kollineation zu erhalten, kann man noch $r+2$ in B gelegenen Punkten $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_{r+1}$, deren je $r+1$ linear unabhängig sind, $r+2$ ebensolche Punkte $\beta_0', \beta_1', \dots \beta_{r+1}'$ aus B_1 willkürlich zuordnen. Zwischen $\beta_0, \dots \beta_{r+1}$ besteht nämlich eine lineare Relation mit lauter nicht verschwindenden Koeffizienten, die wir, da die Zahlen β bei der Bezeichnung der Punkte nur bis auf einen reellen Faktor bestimmt sind, in der Form $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{r+1} = 0$ annehmen dürfen. Ebenso dürfen wir annehmen, daß die einzige zwischen den Zahlen β' bestehende Relation die Form $\beta_0' + \beta_1' + \dots + \beta_{r+1}' = 0$ hat. Soll die lineare Funktion $\varphi(\xi)$ die Punkte β_i in die entsprechenden β_i' überführen, so müssen $r+2$ Gleichungen von der Form $\varphi(\beta_i) = c_i \beta_i'$ bestehen. Dann wird aber

$$0 = \varphi(\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{r+1}) = c_0 \beta_0 + c_1 \beta_1 + \dots + c_{r+1} \beta_{r+1}.$$

Es muß deshalb $c_0 = c_1 = \dots = c_{r+1}$ sein. Bezeichnet nun $\psi(\xi)$ die innerhalb des Moduls B eindeutig bestimmte Funktion, welche den $r+1$ Bedingungen $\psi(\beta_1) = \beta_1', \dots \psi(\beta_{r+1}) = \beta_{r+1}'$ genügt, so wird auch $\psi(\beta_0) = \beta_0'$. Die gesuchte Funktion $\varphi(\xi)$ muß die Form $\varphi(\xi) = c\psi(\xi)$ haben, ist also bis auf den Faktor c bestimmt. Da aber für jeden Modul M $c\mathsf{M} = \mathsf{M}$ wird, so ergeben die verschiedenen Funktionen $c\psi(\xi)$ alle dieselbe Kollineation.

Bestehen zwischen den Moduln $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ die Beziehungen

$$(A, B) = \Delta, \quad [A, B] = \Gamma,$$

und bestimmt man den Modul Z so, daß

$$(\Delta, Z) = 0, \quad [\Delta, Z] = B$$

wird, so ist das System $|A, \Gamma|$ zu $|\Delta, B|$, dieses zu $|0, Z|$ perspektiv. Sind M, N, Σ entsprechende Moduln der Systeme $|A, \Gamma|$, $|\Delta, B|$, $|0, Z|$, so bestehen die Gleichungen

$$N = (M, B), \quad M = [N, A], \quad \Sigma = (N, Z), \quad N = [\Sigma, \Delta].$$

Z ist in B, also (M, Z) in $(M, B) = N$, mithin auch in $(N, Z) = \Sigma$ enthalten. Da aber N in M enthalten ist, so folgt

$$(4.) \qquad (M, Z) = \Sigma.$$

$[\Sigma, A]$ enthält $[\Sigma, \Delta] = N$, also auch $[N, A] = M$. Da aber N den Modul Σ enthält, so folgt

$$(5.) \qquad [\Sigma, A] = M.$$

Für $M = A$ wird $\Sigma = 0$, für $M = \Gamma$ wird $\Sigma = Z$. Die Gleichungen (4.), (5.) ergeben in diesen Fällen

$$(A, Z) = 0, \quad [A, Z] = \Gamma.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß man eine aus linear unabhängigen Zahlen bestehende Basis von Γ erhält, wenn man jedem der Moduln A, Z eine solche Basis entnimmt und diese Basen vereinigt. Da eine lineare Funktion $\varphi(\xi)$ an linear unabhängigen Stellen willkürlich vorgeschrieben werden darf, so kann man φ so wählen, daß $\varphi(A) = \Delta$ und für jede Zahl ξ aus Z $\varphi(\xi) = \xi$ wird. Dann folgt

$$\varphi(M) = \varphi([\Sigma, A]) = [\varphi(\Sigma), \varphi(A)] = [\Sigma, \Delta] = N.$$

Die Gleichung $\varphi(M) = N$ zeigt: *Jede perspektive Beziehung ist eine kollineare.*

Wir betrachten jetzt zwei Systeme $|A, \Gamma|$ *) und $|A_1, \Gamma_1|$, bezeichnen mit a, c, a_1, c_1 die Ränge der Moduln A, Γ, A_1, Γ_1 und setzen die Differenzen $c - a$, $c_1 - a_1$ als gleich voraus. Wir erhalten ein zu $|A, \Gamma|$ perspektives System $|0, B|$ und ein zu $|A_1, \Gamma_1|$ perspektives $|0, B_1|$, wenn wir B und B_1 so wählen, daß

$$(A, B) = 0, [A, B] = \Gamma, \quad (A_1, B_1) = 0, [A_1 B_1] = \Gamma_1$$

wird. B und B_1 sind dann von demselben Range $c - a = c_1 - a_1$, die Systeme $|0, B|$, $|0, B_1|$ kollinear aufeinander beziehbar. — Es liege eine solche

*) Diese Bezeichnung enthält schon die Voraussetzung, daß A Teilmodul des Moduls Γ ist.

Kollineation vor. Bei ihrer analytischen Darstellung haben wir die Wahl, ob wir eine B in B_1 oder eine B_1 in B überführende Funktion benutzen wollen. Unter der Annahme $a \geqq a_1$ entscheiden wir uns für die erste Darstellungsform. Die Funktion $\varphi(\xi)$, welche die Abbildung vermittelt, braucht zunächst nur für die Zahlen ξ aus B definiert zu sein. Wir dehnen dann den Definitionsbereich von $\varphi(\xi)$ über den ganzen Modul Γ aus und verfügen, daß $\varphi(\mathsf{A}) = \mathsf{A}_1$ werden soll, was in Anbetracht der Relationen $(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = 0$, $a \geqq a_1$ möglich ist. In der Kollineation entspricht jedem Modul N aus $\{0, \mathsf{B}\}$ der Modul $\mathsf{N}_1 = \varphi(\mathsf{N})$ aus $\{0, \mathsf{B}_1\}$, in den beiden Perspektivitäten aber entsprechen N und N_1 die Moduln $\mathsf{M} = [\mathsf{N}, \mathsf{A}]$, $\mathsf{M}_1 = [\mathsf{N}_1, \mathsf{A}_1]$, und wir erhalten eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Systeme $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ und $\{\mathsf{A}_1, \Gamma_1\}$. Diese ist wieder eine kollineare; denn sie wird durch die Funktion $\varphi(\xi)$ vermittelt, da ja

$$\varphi(\mathsf{M}) = \varphi([\mathsf{N}, \mathsf{A}]) = [\varphi(\mathsf{N}), \varphi(\mathsf{A})] = [\mathsf{N}_1, \mathsf{A}_1] = \mathsf{M}_1$$

ist. — Wir wollen jetzt zeigen, daß umgekehrt durch eine kollineare Abbildung der beiden Systeme $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$, $\{\mathsf{A}_1, \Gamma_1\}$ auch die beiden zu ihnen perspektiven Systeme $\{0, \mathsf{B}\}$, $\{0, \mathsf{B}_1\}$ kollinear aufeinander bezogen sind. Im vorliegenden Falle ist eine lineare Funktion $\varphi(\xi)$ gegeben, die A und Γ in A_1 und Γ_1 überführt; zu erweisen ist die Existenz einer linearen Funktion $\psi(\xi)$, die $\{0, \mathsf{B}\}$ kollinear und so auf $\{0, \mathsf{B}_1\}$ abbildet, daß die zu entsprechenden Moduln N und $\psi(\mathsf{N})$ dieser Systeme in den Perspektivitäten gehörigen Moduln $[\mathsf{N}, \mathsf{A}]$ und $[\psi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1]$ einander in der durch $\varphi(\xi)$ vermittelten Kollineation zwischen $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ und $\{\mathsf{A}_1, \Gamma_1\}$ zugeordnet sind. Da $\varphi([\mathsf{N}, \mathsf{A}]) = [\varphi(\mathsf{N}), \varphi(\mathsf{A})] = [\varphi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1]$ ist, so lautet die $\psi(\xi)$ auferlegte Forderung: Es soll

$$[\varphi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1] = [\psi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1]$$

sein für jeden Teilmodul N von B. Setzt man $\varphi(\mathsf{B}) = \mathsf{B}_2$, so wird $\Gamma_1 = \varphi(\Gamma) = \varphi([\mathsf{A}, \mathsf{B}]) = [\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_2]$. Wird also mit b_2 der Rang von B_2, mit d_1 der Rang von $(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_2)$ bezeichnet, so ist $b_2 = c_1 - a_1 + d_1 = c - a + d_1$. Nun kann der Rang b_2 von $\mathsf{B}_2 = \varphi(\mathsf{B})$ nicht größer als der Rang $c - a$ von B und d_1 nicht < 0 sein. Mithin ist $d_1 = 0$, $b_2 = c - a$, $(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_2) = 0$. Die Gleichungen

$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1) = 0, \quad [\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1] = \Gamma_1, \quad (\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_2) = 0, \quad [\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_2] = \Gamma_1$$

zeigen, daß sich jede Zahl aus Γ_1, mithin auch jede Zahl aus B_2 auf eine und nur eine Weise in der Form $\alpha_1 + \beta_1$, ebenso jede Zahl aus B_1 auf

eine und nur eine Weise in der Form $\alpha_1 + \beta_2$ darstellen läßt, wenn verlangt wird, daß $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ bzw. den Moduln $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ angehören sollen. Das besagt, daß die Zahlen der Moduln $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ einander eineindeutig in der Weise entsprechen, daß zugeordnete Zahlen einander mod. A_1 kongruent sind. Wird die einer Zahl ξ aus B_2 kongruente Zahl aus B_1 mit $\chi(\xi)$ bezeichnet, so ist, wie sofort zu sehen, $\chi(\xi)$ (innerhalb B_2) eine lineare Funktion von ξ. Daher stellt $\psi(\xi) = \chi(\varphi(\xi))$, wenn ξ den Modul B durchläuft, eine lineare Funktion dar, durch welche $\{0, \mathsf{B}\}$ kollinear auf $\{0, \mathsf{B}_1\}$ abgebildet wird. Ist N ein Teilmodul von B, so sind die Zahlen des Moduls $\varphi(\mathsf{N})$ denen des Moduls $\psi(\mathsf{N})$ mod. A_1 kongruent. Daraus folgt, daß $\psi(\mathsf{N})$ in $[\varphi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1]$ und ebenso $\varphi(\mathsf{N})$ in $[\psi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1]$ enthalten ist. Mithin wird $[\varphi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1 \quad , \psi(\mathsf{N}), \mathsf{A}_1]$. Die Funktion $\psi(\xi)$ erfüllt also die gestellte Forderung.

Jetzt erkennt man sofort, *daß* ganz allgemein *zwei zu einem dritten System kollineare Systeme auch zueinander kollinear sind.* Sind nämlich erstens $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ und $\{\mathsf{A}_1, \Gamma_1\}$, zweitens $\{\mathsf{A}_1, \Gamma_1\}$ und $\{\mathsf{A}_2, \Gamma_2\}$ zueinander kollinear, und bestimmt man drei Systeme $\{0, \mathsf{B}\}$, $\{0, \mathsf{B}_1\}$, $\{0, \mathsf{B}_2\}$, die bzw. zu $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$, $\{\mathsf{A}_1, \Gamma_1\}$, $\{\mathsf{A}_2, \Gamma_2\}$ perspektiv sind, so erhält man eine Kollineation zwischen $\{0, \mathsf{B}\}$ und $\{0, \mathsf{B}_1\}$ und eine zwischen $\{0, \mathsf{B}_1\}$ und $\{0, \mathsf{B}_2\}$. Die erste dieser Kollineationen kann durch eine B in B_1 überführende Funktion $\psi(\xi)$, die zweite durch eine B_1 in B_2 überführende Funktion $\psi_1(\xi)$ vermittelt werden. Es resultiert eine durch die Funktion $\psi_1(\psi(\xi))$ vermittelte Kollineation zwischen $\{0, \mathsf{B}\}$ und $\{0, \mathsf{B}_2\}$, und daher ist auch die dieser entsprechende Korrespondenz zwischen $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ und $\{\mathsf{A}_2, \Gamma_2\}$, die mit der aus den beiden gegebenen Kollineationen resultierenden Korrespondenz identisch ist, eine kollineare.

Um nun auch die sogenannten *Korrelationen* zu erhalten, führen wir die Begriffe der *„konjugierten Funktionen“* und *„polaren Elemente“* ein. Als die zu einer (im ganzen komplexen Gebiete P definierten) linearen Funktion $\varphi(\xi)$ konjugierte Funktion bezeichnen wir die lineare Funktion

$$\psi(\xi) = (\varphi(\varepsilon_1) \cdot \xi) \cdot \varepsilon_1 + \cdots + (\varphi(\varepsilon_n) \cdot \xi)\, \varepsilon_n .$$

Aus dieser Gleichung folgt $\psi(\xi)\, \varepsilon_i = \varphi(\varepsilon_i)\, \xi$ und für eine beliebige komplexe Zahl $\eta = c_1 \varepsilon_1 + \cdots + c_n \varepsilon_n$

$$\psi(\xi) \cdot \eta = c_1 \psi(\xi) \varepsilon_1 + \cdots + c_n \psi(\xi) \varepsilon_n = (c_1 \varphi(\varepsilon_1) + \cdots + c_n \varphi(\varepsilon_n))\, \xi = \varphi(\eta) \cdot \xi,$$

$$\psi(\xi)\, \eta = \varphi(\eta)\, \xi. \qquad (6.)$$

Wenn man hier ξ, ε_i an die Stelle von η, ξ setzt, mit ε_i multipliziert und summiert, so erhält man (unter Benutzung der Identität § 3, (3.)) die Gleichung

$$(\psi(\varepsilon_1)\xi)\varepsilon_1 + \cdots + (\psi(\varepsilon_n)\xi)\varepsilon_n = (\varphi(\xi)\varepsilon_1)\varepsilon_1 + \cdots + (\varphi(\xi)\varepsilon_n)\varepsilon_n = \varphi(\xi),$$

welche zeigt, daß $\varphi(\xi)$ die zu $\psi(\xi)$ konjugierte Funktion ist. — *Polare Elemente* nennen wir solche, die komplementären Moduln (§ 3) entsprechen. Das zu einem Element A polare Element (bzw. den zu A komplementären Modul) bezeichnen wir im folgenden mit A^*. Aus den Sätzen über komplementäre Moduln ergibt sich: Die Indizes polarer Elemente ergänzen sich zu n. Liegt A in Γ, so geht A^* durch Γ^*. Die zu den Elementen eines Systems $\{\mathsf{A}, \Gamma\}$ polaren Elemente bilden das „polare System" $\{\Gamma^*, \mathsf{A}^*\}$.

Es seien $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ zwei konjugierte lineare Funktionen; es werde $\varphi(\mathsf{P}) = \Sigma$, $\psi(\mathsf{P}) = \mathsf{T}$ gesetzt (P = System aller komplexen Zahlen) und mit m der Rang des von den Nullstellen von $\varphi(\xi)$ gebildeten Moduls bezeichnet. Dann ist $n - m$ der Rang von Σ. Ist δ Nullstelle von $\varphi(\xi)$, so hat man für jedes ξ (nach (6.))

$$0 = \varphi(\delta)\xi = \psi(\xi)\delta.$$

Da $\psi(\xi)$ jede Zahl aus T sein kann, so gehört δ dem Modul T^* an. Nimmt man andererseits an, daß δ zu T^* gehört, so wird für jedes ξ

$$0 = \psi(\xi)\delta = \varphi(\delta)\xi,$$

also $\varphi(\delta) = 0$. Somit wird T^* von den Nullstellen der Funktion $\varphi(\xi)$, ebenso Σ^* von den Nullstellen der Funktion $\psi(\xi)$ gebildet. Die Ränge der Moduln $\mathsf{T}^*, \Sigma^*, \Sigma$ sind $m, m, n - m$. Durch $\varphi(\xi)$ wird das System $\{\mathsf{T}^*, \mathsf{P}\}$ auf das System $\{0, \Sigma\}$, durch $\psi(\xi)$ $\{\Sigma^*, \mathsf{P}\}$ auf $\{0, \mathsf{T}\}$ kollinear abgebildet. Bei diesen Abbildungen erfährt jeder Modul eine Rangerniedrigung um m. — Es sei A ein Modul aus dem System $\{\mathsf{T}^*, \mathsf{P}\}$, a sein Rang. Dann gehört $\mathsf{A}_1 = \varphi(\mathsf{A})$ dem System $\{0, \Sigma\}$, A_1^* dem zu diesem polaren System $\{\Sigma^*, \mathsf{P}\}$, mithin $\psi(\mathsf{A}_1^*)$ dem System $\{0, \mathsf{T}\}$ an. Die Rangzahlen der Moduln $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1^*, \psi(\mathsf{A}_1^*)$ sind $a - m$, $n - a + m$, $n - a$. Ist α_1^* eine Zahl aus A_1^*, so wird für jede Zahl α aus A

$$0 = \varphi(\alpha) \cdot \alpha_1^* = \psi(\alpha_1^*) \cdot \alpha.$$

Mithin gehört $\psi(\alpha_1^*)$ dem Modul A^* an, und $\psi(\mathsf{A}_1^*)$ ist also ein Teil dieses Moduls. Da aber beide Moduln denselben Rang $n - a$ haben, so ist $\psi(\mathsf{A}_1^*) = \mathsf{A}^*$. Ist Γ ein zweiter Modul aus $\{\mathsf{T}^*, \mathsf{P}\}$, und wird $\varphi(\Gamma) = \Gamma_1$ ge-

setzt, so folgt $\psi(\Gamma_1^*) = \Gamma^*$. Nehmen wir an, daß Γ den Modul A enthält, so werden durch $\varphi(\xi)$ die Systeme $\{A, \Gamma\}$ und $\{A_1, \Gamma_1\}$, durch $\psi(\xi)$ die zu ihnen polaren Systeme $\{\Gamma_1^*, A_1^*\}$ und $\{\Gamma^*, A^*\}$, kollinear aufeinander bezogen, und zwar so, daß man aus einem zugeordneten Paar der ersten Systeme ein solches der zweiten erhält, indem man die beiden Elemente durch ihre polaren ersetzt. Nun ist die Kollineation zwischen $\{A, \Gamma\}$ und $\{A_1, \Gamma_1\}$ durchaus allgemeiner Natur; denn es wurde oben gezeigt, daß sich jede Kollineation als Teil einer Kollineation, die zwischen zwei Systemen von der Form $\{\Delta, P\}$ und $\{0, \Sigma\}$ besteht, auffassen läßt. Es gilt also der Satz: *Wenn man in einer Kollineation jedes Elementenpaar durch das polare Paar ersetzt, so erhält man wieder eine Kollineation.*

Es seien zwei Systeme $\{A, \Gamma\}$, $\{A_1, \Gamma_1\}$ eindeutig aufeinander abgebildet. Man erhält dann eine eindeutige Beziehung zwischen $\{\Gamma^*, A^*\}$ und $\{A_1, \Gamma_1\}$ und eine eindeutige Beziehung zwischen $\{A, \Gamma\}$ und $\{\Gamma_1^*, A_1^*\}$, wenn man in jedem Paare M, M_1 entsprechender Elemente aus $\{A, \Gamma\}$ und $\{A_1, \Gamma_1\}$ nur das erste bzw. nur das zweite durch das polare Element ersetzt. Ist eine dieser beiden Beziehungen eine Kollineation, so ist es nach dem zuletzt bewiesenen Satze die andere auch. Die eindeutige Beziehung zwischen $\{A, \Gamma\}$ und $\{A_1, \Gamma_1\}$ heißt in diesem Falle *Korrelation.* Kollineation und Korrelation führen den gemeinsamen Namen *Projektivität.* Nun ergibt sich auch sofort, *daß zwei Systeme, die zu einem dritten projektiv sind, auch zueinander projektiv sind,* und *daß unter diesen drei Projektivitäten entweder keine oder zwei Korrelationen sind.* Ferner erhellt, daß für die Möglichkeit einer Projektivität zwischen zwei Systemen $\{A, \Gamma\}$, $\{A_1, \Gamma_1\}$ die Gleichheit der Rangdifferenzen zwischen Γ und A und zwischen Γ_1 und A_1 notwendig und hinreichend ist, und daß, wenn diese Bedingung erfüllt ist, sowohl kollineare als auch korrelative Abbildung möglich ist. Ist die Rangdifferenz $= r + 1 \geqq 2$, so werden im Falle der Kollineation die beiden linearen Systeme $\{A, \Gamma\}_1$ und $\{A_1, \Gamma_1\}_1$, ebenso die beiden Systeme $\{A, \Gamma\}_2$ und $\{A_1, \Gamma_1\}_2$, im Falle einer Korrelation die Systeme $\{A, \Gamma\}_1$ und $\{A_1, \Gamma_1\}_2$, ebenso die Systeme $\{A, \Gamma\}_2$ und $\{A_1, \Gamma_1\}_1$ eindeutig aufeinander abgebildet. Auch diese Abbildungen linearer Systeme heißen Kollineationen bzw. Korrelationen oder gemeinsam Projektivitäten. Für die Möglichkeit projektiver Beziehung zweier linearer Systeme ist die Gleichheit ihrer Dimensionen notwendig und hinreichend. Es ergibt sich auch jetzt sofort (nachdem es oben für

einen bestimmten Fall bewiesen wurde) ganz allgemein, daß man eine projektive Beziehung zwischen zwei r-dimensionalen linearen Systemen festsetzen kann, indem man $r+2$ zugeordnete Paare willkürlich vorschreibt, mit der einzigen Einschränkung, daß in dem einen wie in dem andern System je $r+1$ von den $r+2$ Elementen unabhängig sein müssen, d. h. keinem linearen System von weniger als r Dimensionen angehören dürfen. Die projektive Beziehung ist kollinear, wenn beide Systeme von gleicher (erster bzw. zweiter) Art sind, korrelativ, wenn sie von verschiedener Art sind. Bei den eindimensionalen Systemen, bei denen zwischen den beiden Arten kein Unterschied besteht, wird auch die Unterscheidung von Kollineationen und Korrelationen hinfällig. Es bezeichne nämlich M den Modul vom Range 2 mit der Basis $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Dann vermittelt die Funktion $\varphi(\xi) = (\varepsilon_2 \xi) \cdot \varepsilon_1 - (\varepsilon_1 \xi) \cdot \varepsilon_2$ eine Kollineation zwischen den eindimensionalen linearen Systemen $\{\mathsf{M}^*, \mathsf{P}\}_1 (= \{\mathsf{M}^*, \mathsf{P}\}_2)$ und $\{0, \mathsf{M}\}_1 (= \{0, \mathsf{M}\}_2)$. Nun wird aber für beliebiges ξ $\varphi(\xi) \cdot \xi = 0$, woraus hervorgeht, daß je zwei zugeordnete Elemente polar sind, die Abbildung also auch als Korrelation gelten kann. Daraus folgt leicht zunächst, daß jede projektive Beziehung zwischen $\{0, \mathsf{M}\}_1$ und einem beliebigen eindimensionalen System, sodann daß auch jede projektive Beziehung zwischen zwei beliebigen eindimensionalen Systemen zugleich kollinear und korrelativ ist.

§ 31. Abgeschlossene und konvexe Punktmengen im projektiven Raum.

Es bezeichne A eine Menge komplexer Zahlen mit den folgenden Eigenschaften:

a) Sind α_1, α_2 Zahlen aus A, so gehört auch jede Zahl $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ mit nicht negativen Koeffizienten c zu A,

b) es gibt wenigstens eine komplexe Zahl γ, für welche alle Produkte $\gamma\alpha$, in denen α eine von 0 verschiedene Zahl aus A bezeichnet, positiv ausfallen.

Die Zahlenmenge $-\mathsf{A}$ hat dann auch die Eigenschaften a) und b), und sie stellt dieselbe Punktmenge im projektiven Raume dar wie A. Es gilt aber auch:

Wenn zwei Zahlenmengen A, B *die Eigenschaften* a) *und* b) *haben, und wenn sie dieselbe Punktmenge im projektiven Raum bezeichnen, so ist* $\mathsf{A} = +\mathsf{B}$ *oder* $= -\mathsf{B}$. Zunächst nämlich muß B, wenn $\alpha_1 \neq 0$ irgend eine

Zahl aus A ist, entweder alle Zahlen $c\alpha_1$ oder alle Zahlen $-c\alpha_1$ enthalten, wenn unter c jede positive Zahl verstanden wird. Im ersten Fall ist α_1 in B, im zweiten in $-$B enthalten. Nehmen wir den ersten Fall an. Dann enthalten A und B alle Zahlen $c\alpha_1$ $(c > 0)$, aber zufolge der Eigenschaft b) keine der Zahlen $-c\alpha_1$. Ist nun α_2 irgend eine von α_1 unabhängige Zahl aus A, und wird γ so gewählt, daß $\gamma\alpha$ für jedes von 0 verschiedene α aus A positiv ausfällt, so wird, wenn man $\gamma\alpha_2 = c_1$, $\gamma\alpha_1 = c_2$ setzt,

$$c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 \neq 0, \quad \gamma(c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2) = 0, \quad \gamma(c_2\alpha_2 - c_1\alpha_1) = 0.$$

Also kann keine der beiden Zahlen $c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2$, $c_2\alpha_2 - c_1\alpha_1$ zu A, also auch keine zu B gehören. Das würde aber zufolge a) bei $c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2$ der Fall sein, wenn $-\alpha_2$ in B vorkäme. Also muß α_2 zu B gehören. So ergibt sich B = A. Falls α_1 zu $-$B gehört, erhält man ebenso $-$B = A.

Unter der Voraussetzung, daß die Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_r$ linear unabhängig sind, sei mit $T(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ das System A aller Zahlen

$$(7.) \qquad c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \qquad (c_1 \geqq 0, \dots c_r \geqq 0)$$

verstanden, die sich aus $\alpha_1, \dots \alpha_r$ mit nicht negativen Zahlen komponieren lassen. Das System A besitzt die Eigenschaft a) und, da es wegen der Unabhängigkeit der Zahlen α_i wenigstens eine den Gleichungen $\alpha_i\gamma = 1$ $(i = 1, \dots r)$ genügende Zahl gibt, und für eine solche die Funktion $\gamma\xi$, während ξ die von 0 verschiedenen Zahlen aus A durchläuft, stets positiv ist, auch die Eigenschaft b). Ein System $T(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ ändert sich nicht, wenn man die Zahlen α_i vertauscht oder mit positiven Faktoren multipliziert. Ist τ eine (feste) Zahl aus A, die nicht die Form $c_i\alpha_i$ hat, bei deren Darstellung in der Form (7.) also wenigstens zwei Koeffizienten positiv werden, so läßt sich τ aus zwei linear unabhängigen Zahlen des Systems A mittels positiver Zahlen komponieren. Läßt man daher alle Zahlen von der Form $c\tau$ $(c > 0)$ aus A fort, so hat das zurückbleibende System nicht mehr die Eigenschaft a). Dagegen behält es diese Eigenschaft, wenn man, unter i eine der Zahlen $1, \dots r$ verstehend, aus A alle Zahlen $c\alpha_i$ $(c > 0)$ streicht. Die Zahlen von der Form $c_i\alpha_i$ $(i = 1, \dots r)$ sind daher vor den andern ausgezeichnet, und ein System $T(\beta_1, \dots \beta_r)$ kann also auch nur dann mit $T(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ identisch sein, wenn die Zahlen β_i, von der Reihenfolge und von positiven Faktoren abgesehen, mit den Zahlen α_i übereinstimmen. Das System der Punkte, welche durch die Zahlen von $T(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ bezeichnet werden, heißt ein *Simplex*, und zwar

ein $(r-1)$-dimensionales, indem allgemein unter einer $(r-1)$-dimensionalen Punktmenge A eine solche verstanden werden soll, für welche der kleinste die zugehörigen Zahlen enthaltende Modul (*Md.* A) vom Range r ist. — Ist $r > 1$, so heißen diejenigen Punkte des Simplexes, welche durch Zahlen von der Form (7.) mit lauter positiven Koeffizienten bezeichnet werden, also keinem der durch $r-1$ von den Zahlen α_i bestimmten Simplexe angehören, *innere Punkte*, die andern *Begrenzungspunkte* des Simplexes. Die Systeme $\mathsf{A} = T(\alpha_1, \ldots \alpha_r)$ und $-\mathsf{A}$ bezeichnen beide dasselbe Simplex, und dies sind nach Satz 1. die beiden einzigen dieses Simplex bezeichnenden Zahlsysteme mit den Eigenschaften a) und b). Das $(r-1)$-dimensionale Simplex hat seine „Ecken" $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ noch mit $2^{r-1}-1$ andern Simplexen gemein, die den verschiedenen Vorzeichenkombinationen von $\pm\alpha_1, \ldots \pm\alpha_r$ entsprechen, von denen je zwei, die durch Umkehrung aller Vorzeichen auseinander hervorgehn, dasselbe Simplex liefern. Die 2^{r-1} Simplexe füllen das lineare System der in *Md.* A gelegenen Punkte lückenlos aus und haben keine inneren Punkte gemein.

r-dimensionale Umgebung eines Punktes α heißt jedes r-dimensionale Simplex, für welches α innerer Punkt ist. *Innerer Punkt* einer beliebigen r-dimensionalen Punktmenge A heißt ein Punkt α, wenn er innerer Punkt eines ganz zu A gehörigen r-dimensionalen Simplexes ist. *Häufungsstelle* einer Punktmenge A heißt ein Punkt α, wenn in jeder $(n-1)$-dimensionalen Umgebung von α Punkte $\neq \alpha$ liegen, die zu A gehören. Eine Punktmenge A heißt *abgeschlossen*, wenn kein zu A nicht gehöriger Punkt Häufungsstelle von A ist.

Ein eindimensionales Simplex heißt *Strecke*. Zwei Punkte α, β bestimmen zwei Strecken, die zusammen die ganze durch α, β bestimmte Gerade erfüllen. Eine Punktmenge A heißt *konvex*, wenn von den beiden durch zwei Punkte von A bestimmten Strecken jedesmal die eine ganz zu A gehört *und wenigstens eine äußere Ebene* (Ebene = Element vom Index $n-1$) *existiert*, d. h. eine solche, die keinen Punkt von A enthält. (Dieser einschränkende Zusatz ist nötig, sonst würden Punktmengen wie die auf einer Seite einer hyperbolisch gekrümmten Fläche zweiter Ordnung, die von den sonst als konvex bezeichneten Mengen ganz verschieden sind, mit zu diesen gerechnet werden.) Ist Λ äußere Ebene einer konvexen Punktmenge A, so muß von den beiden durch zwei Punkte von A

bestimmten Strecken die eine zu A gehören, die andere Λ schneiden. Der Durchschnitt konvexer Punktmengen, die eine gemeinsame äußere Ebene haben, ist eine konvexe Punktmenge. Dies braucht aber nicht mehr der Fall zu sein, wenn keine gemeinsame äußere Ebene existiert. So besteht z. B. der Durchschnitt der beiden durch zwei Punkte bestimmten Strecken aus eben diesen beiden Punkten, ist also nicht konvex. Natürlich wird auch der Begriff der kleinsten enthaltenden konvexen Punktmenge im allgemeinen illusorisch, während der Satz vom Durchschnitt abgeschlossener Punktmengen und der Begriff der kleinsten enthaltenden abgeschlossenen Punktmenge in der projektiven Geometrie wie in der *Euclid*ischen gelten.

Eine kollineare Beziehung zwischen zwei linearen r-dimensionalen Punktmannigfaltigkeiten $\{0, \mathsf{M}\}_1$ kann stets durch eine eindeutig umkehrbare lineare Funktion $\varphi(\xi)$ vermittelt werden. Eine solche führt aber jedes Zahlensystem $T(\alpha_1, \ldots \alpha_r)$ in ein ebensolches System über. Daraus folgt, daß die im Vorstehenden erklärten Begriffe „Simplex", „Umgebung", „innerer Punkt", „Häufungsstelle", „abgeschlossene" bzw. „konvexe Punktmenge" sich solchen Kollineationen gegenüber invariant verhalten. *Dies ermöglicht die Übertragung dieser Begriffe auf beliebige projektive lineare Systeme.* So kann eine (r-dimensionale) Teilmenge eines (r-dimensionalen) linearen Systems $\{\mathsf{A}, \Gamma\}_1$ oder $\{\mathsf{A}, \Gamma\}_2$ als Simplex bezeichnet oder konvex oder abgeschlossen genannt werden, wenn ihre kollineare oder korrelative Abbildung auf eine (r-dimensionale) lineare Punktmenge ein Simplex bzw. eine konvexe oder abgeschlossene Punktmenge ergibt.

Wir betrachten jetzt nebeneinander einen *Euclid*ischen Raum $\mathfrak{E}$ von n und einen projektiven Raum $\mathfrak{P}$ von $n-1$ Dimensionen. Dasselbe System P komplexer Zahlen mit n Einheiten $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ dient zur Darstellung der Geometrien beider Räume. Ein Modul vom Range $r > 0$ bezeichnet in $\mathfrak{P}$ ein Element vom Index r, in $\mathfrak{E}$ eine r-dimensionale den Nullpunkt enthaltende lineare Mannigfaltigkeit, sodaß diese linearen Mannigfaltigkeiten von $\mathfrak{E}$ mit den Elementen von $\mathfrak{P}$ in eindeutiger Beziehung stehen. Insbesondere entspricht jeder Ebene von $\mathfrak{P}$ eine durch 0 gehende Ebene in $\mathfrak{E}$, jedem Punkte α von $\mathfrak{P}$ eine durch 0 gehende Gerade in $\mathfrak{E}$. Diese zerfällt in zwei Gegenstrahlen α, $-\alpha$ mit dem Ursprung 0. Als Bild einer Punktmenge von $\mathfrak{P}$ erhält man also in $\mathfrak{E}$ ein aus Gegenstrahlenpaaren zusammengesetztes Strahlsystem mit dem Ursprung 0. Bringt

man die Strahlen mit der durch die Gleichung $\xi^2 = 1$ gegebenen Oberfläche der Einheitskugel zum Schnitt, so erhält man eine Abbildung des Punktraumes $\mathfrak{P}$ auf diese Fläche, bei welcher jedem Punkte α von $\mathfrak{P}$ die beiden Gegenpunkte $\pm \frac{\alpha}{|\alpha|}$ der Kugelfläche entsprechen.

Ist A eine Punktmenge in $\mathfrak{E}$, α ein Punkt aus A, $c \neq 0$, so ergibt sich sofort, daß, wenn α innerer Punkt von A ist, $c\alpha$ innerer Punkt von $c\mathsf{A}$ sein muß, und umgekehrt. Ist nun A ein Strahlsystem vom Ursprung 0, $c > 0$, so wird $c\mathsf{A} = \mathsf{A}$, und da der Punkt $c\alpha$ den Strahl α durchläuft, wenn c durch alle positiven Zahlen geht, so besteht ein Strahl eines Strahlsystems entweder aus lauter inneren Punkten (vom Ursprung abgesehen) oder er gehört ganz der Begrenzung an, sodaß man *innere* und *Begrenzungsstrahlen* unterscheiden kann. Besteht das Strahlsystem A aus lauter Paaren von Gegenstrahlen, so besteht die Gleichung $c\mathsf{A} = \mathsf{A}$ auch für negatives c, zwei Gegenstrahlen sind entweder beide innere oder beide Begrenzungsstrahlen. Nehmen wir diesen Fall an, bezeichnen wir mit α_0 einen inneren Strahl von A und zugleich einen Punkt dieses Strahles, mit r den Rang von *Md.* A, mit p den Radius einer sphärischen, r-dimensionalen, ganz in A gelegenen Umgebung von α_0; wählen wir sodann in *Md.* A die Zahlen $\alpha_1, \dots \alpha_r$ so, daß $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{r-1}$ eine Basis von A bilden und $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1} + \alpha_r = 0$ wird, ferner eine positive Zahl c, die kleiner als die kleinste der Zahlen $\frac{p}{|\alpha_i|}$ $(i = 1, \dots r)$ ist. Dann bilden die r Zahlen $\alpha_i' = \alpha_0 - c\alpha_i$ $(i = 1, \dots r)$ eine Basis von *Md.* A, die Punkte α_i' und also auch alle Punkte

$$c_1\alpha_1' + \cdots + c_r\alpha_r' \qquad (c_1 \geqq 0, \dots c_r \geqq 0,\ c_1 + \cdots + c_r = 1)$$

gehören der sphärischen Umgebung von α_0 und somit A an, und es wird

$$\alpha_1' + \cdots + \alpha_r' = r\alpha_0 - c(\alpha_1 + \cdots + \alpha_r) = (r + c)\alpha_0.$$

Es läßt sich also der Strahl α_0 aus den r unabhängigen Strahlen $\alpha_1', \dots \alpha_r'$ mittels positiver Koeffizienten komponieren, und alle aus $\alpha_1', \dots \alpha_r'$ mittels nicht negativer Koeffizienten komponierbaren Strahlen oder, anders ausgedrückt, alle durch die Zahlen aus $T(\alpha_1', \dots \alpha_r')$ bezeichneten Strahlen gehören zu A. Wenn umgekehrt der Strahl α_0 aus den unabhängigen Strahlen $\alpha_1', \dots \alpha_r'$ positiv komponierbar ist und die durch die Zahlen aus $T(\alpha_1', \dots \alpha_r')$ bezeichneten Strahlen sämtlich zu A gehören, so ist α_0 innerer Strahl von A. Denn in diesem Fall stellt *Md.* A die kleinste durch die

$r+1$ Punkte $0, \alpha'_1, \dots \alpha'_r$ bestimmte lineare Mannigfaltigkeit dar und diese Punkte sind die Ecken eines ganz in A gelegenen r-dimensionalen Simplexes. Da nun eine Gleichung $\alpha_0 = c_1\alpha'_1 + \cdots + c_r\alpha'_r$ mit positiven Koeffizienten besteht, der wir, indem wir $c_1 + \cdots + c_r = s$ setzen, die Form

$$\frac{\alpha_0}{2s} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \frac{c_1}{2s}\alpha'_1 + \cdots + \frac{c_r}{2s}\alpha'_r$$

geben können, bei welcher rechts die Koeffizientensumme gleich 1 ist, so ist $\frac{\alpha_0}{2s}$ innerer Punkt des Simplexes, der Strahl α_0 innerer Strahl von A. Die Bedingung für einen inneren Strahl α_0 des Strahlsystems A ist aber dieselbe wie die Bedingung dafür, daß der Punkt α_0 des projektiven Raumes innerer Punkt der durch die Zahlenmenge A dargestellten Punktmenge sei. Bei der Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{E}$ werden also inneren Punkten innere Strahlen zugeordnet und umgekehrt.

Es sei wieder A eine Zahlenmenge, die in $\mathfrak{E}$ ein aus Gegenstrahlenpaaren zusammengesetztes Strahlsystem, in $\mathfrak{P}$ eine Punktmenge darstellt. Zu einem Punkt α in $\mathfrak{P}$, der nicht Häufungsstelle von A ist, gehört eine $(n-1)$-dimensionale Umgebung, die mit A höchstens den Punkt α gemein hat. Dieser Umgebung entspricht in $\mathfrak{E}$ ein n-dimensionales Strahlsystem, das mit dem Strahlsystem A höchstens die Strahlen $\pm\alpha$ gemein hat und für welches diese Strahlen innere sind. Zu jedem von 0 verschiedenen Punkte dieser Strahlen gehört also eine n-dimensionale Umgebung, die, mit eventueller Ausnahme der in den Strahlen $\pm\alpha$ gelegenen Punkte, keinen Punkt mit A gemein hat. Die Strahlen $\pm\alpha$ sind also auch nicht Häufungsstrahlen von A. Ist umgekehrt in $\mathfrak{E}$ der Strahl α nicht Häufungsstrahl von A, so gehört zu einem Punkt α dieses Strahles eine n-dimensionale Umgebung, die mit A höchstens Punkte des Strahls α gemein hat. Dasselbe gilt dann auch von dem kleinsten diese Umgebung enthaltenden Strahlsystem vom Ursprung 0. Diesem entspricht in $\mathfrak{P}$ eine Punktmenge, die mit der Punktmenge A höchstens α gemein hat und α im Innern enthält. α ist also kein Häufungspunkt von A. Hieraus folgt weiter, daß bei der Abbildung von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{E}$ abgeschlossenen Punktmengen abgeschlossene Strahlsysteme entsprechen und umgekehrt. — Da die linearen Mannigfaltigkeiten von $\mathfrak{E}$ als abgeschlossene Strahlsysteme aufgefaßt werden können, gehören auch die linearen projektiven Punktmengen und allgemeiner die linearen projektiven Systeme zu den abgeschlossenen.

Es bezeichne A eine konvexe Punktmenge des projektiven Raumes und zugleich die Menge aller zugehörigen Zahlen (einschließlich 0). Ist $\gamma\xi = 0$ die Gleichung für die Punkte einer äußeren Ebene, so hat die Funktion $\gamma\xi$ innerhalb A nur die Nullstelle 0, und wenn wir mit A_0 das System der Zahlen ξ aus A bezeichnen, für welche $\gamma\xi \geqq 0$ ist, so setzt sich A aus den Zahlenmengen A_0 und $-\mathsf{A}_0$ zusammen, die nur die 0 gemein haben. Sind α_1, α_2 zwei linear unabhängige Zahlen aus A_0, so stellen $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ und $c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2$, wenn c_1, c_2 alle positiven Zahlen durchlaufen, die zwei durch α_1 und α_2 bestimmten Strecken dar, von denen die eine die äußere Ebene schneiden, die andere der konvexen Punktmenge angehören muß. Da $\gamma(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)$ stets positiv ist, so kann die Strecke $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ die Ebene $\gamma\xi = 0$ nicht schneiden, sie liegt also ganz in A, und die Zahlen $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ gehören alle zu A_0. Das Zahlsystem A_0 besitzt also, ebenso wie $-\mathsf{A}_0$, die Eigenschaften a) und b), und nach Satz 1. sind dies die einzigen Zahlenmengen mit diesen Eigenschaften, welche die gegebene Punktmenge darstellen. Daraus ist ersichtlich, daß die Einteilung in A_0 und $-\mathsf{A}_0$ von der Wahl der äußeren Ebene unabhängig ist. — Deuten wir nun A_0 im *Euclid*ischen Raum. Die Eigenschaft a) ist der genaue Ausdruck dafür, daß A_0 ein konvexes Strahlsystem vom Ursprung 0 darstellt, während b) besagt, daß dieses Strahlsystem Stützebenen besitzt, mit denen es nur den Punkt 0 gemein hat. Geht man umgekehrt von einem solchen Strahlsystem A_0 aus, so besitzt die Zahlenmenge A_0 die Eigenschaften a) und b) und stellt, wie sofort zu sehen, in $\mathfrak{P}$ eine konvexe Punktmenge dar, zu welcher nur die Zahlen aus A_0 und $-\mathsf{A}_0$ gehören. Bezeichnet in $\mathfrak{E}$ Λ eine Stützebene des konvexen Strahlsystems A_0, die mit A_0 nur den Punkt 0 gemein hat, so liegt, von diesem Punkte abgesehen, A_0 ganz auf der einen, $-\mathsf{A}_0$ ganz auf der andern Seite von Λ. Daher kann ein Punkt von $-\mathsf{A}_0$ auch nicht Häufungsstelle von A_0 sein. Ist nun das aus A_0 und $-\mathsf{A}_0$ zusammengesetzte Strahlsystem A abgeschlossen und $\alpha\,(\neq 0)$ Häufungspunkt von A_0, so ist α Häufungspunkt, also auch Punkt von A und muß, weil seine Zugehörigkeit zu $-\mathsf{A}_0$ ausgeschlossen ist, A_0 angehören. Mithin ist auch A_0 abgeschlossen. Umgekehrt folgt aus der Abgeschlossenheit von A_0 sofort die von $-\mathsf{A}_0$ und von A. Das Strahlsystem A ist aber dann und nur dann abgeschlossen, wenn in $\mathfrak{P}$ die Punktmenge A abgeschlossen ist. Nach den Sätzen 4. und 8. in § 19 fallen die konvexen abgeschlossenen Strahl-

systeme, welche Stützebenen besitzen, mit denen sie nur einen Punkt gemein haben, zusammen mit den konvexen abgeschlossenen Strahlsystemen der Stufe 0. Wir sehen also, *daß jedem abgeschlossenen konvexen Strahlsystem 0-ter Stufe* A_0 (*mit dem Ursprung* 0) *aus* $\mathfrak{E}$ *in* $\mathfrak{P}$ *eine konvexe Punktmenge zugeordnet ist, und umgekehrt jeder solchen Punktmenge zwei entgegengesetzte konvexe und abgeschlossene Strahlsysteme* A_0, $-\mathsf{A}_0$ *von der* 0*-ten Stufe entsprechen.* Die konvexen abgeschlossenen Punktmengen aus $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir auch als *konvexe Körper.* Ist ein solcher Körper von der Dimension $n-1$, so hat das zugeordnete Strahlsystem A_0 die Dimension n, und das zu A_0 komplementäre Strahlsystem B_0 ist ebenfalls von der Stufe 0 und der Dimension n (§ 19, 7.). Zugleich sind auch $-\mathsf{A}_0$ und $-\mathsf{B}_0$ komplementäre Systeme. Dem paarweisen Auftreten von konvexen abgeschlossenen Strahlsystemen von der Stufe 0 und der Dimension n entspricht in $\mathfrak{P}$ ein paarweises Auftreten der $(n-1)$-dimensionalen konvexen Körper. Wir wollen zwei in dieser Weise zusammengehörige Körper *konjugiert* nennen*).

Es mögen A und B zwei konjugierte $(n-1)$-dimensionale konvexe Körper aus $\mathfrak{P}$ und zugleich die Systeme der sämtlichen zugehörigen Zahlen bezeichnen. A_0, $-\mathsf{A}_0$, B_0, $-\mathsf{B}_0$ seien die entsprechenden konvexen Strahlsysteme in $\mathfrak{E}$ und die zugehörigen Zahlsysteme. Dabei sollen A_0 und B_0 komplementär sein. Ein innerer Punkt von A in $\mathfrak{P}$ kann durch eine Zahl α bezeichnet werden, die zugleich einen Innenstrahl von A_0 darstellt. Man kann dann in A_0 n unabhängige Strahlen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ so wählen, daß

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

wird. Für jeden Strahl β aus B erhält man dann

$$\alpha\beta = \alpha_1\beta + \cdots + \alpha_n\beta < 0,$$

weil keins der Produkte $\alpha_i\beta$ positiv ist und nicht alle $=0$ sein können. Die Gleichung $\alpha\xi = 0$ hat daher in B_0, also auch in B (von 0 abgesehen) keine Lösung. Da die Lösungen dieser Gleichung in $\mathfrak{P}$ die Punkte der zu α polaren Ebene darstellen, so ist die Polarebene eines inneren Punktes des Körpers A

---

*) Die Beziehung der konjugierten Körper drückt natürlich ebensowenig wie die der polaren Elemente eine rein projektive Eigenschaft aus. Sie kann bei einer Kollineation verloren gehen. Dies hängt damit zusammen, daß zum Zweck einer bequemeren rechnerischen Darstellung das System der Einheiten ε_i (bei der Einführung der Multiplikation komplexer Zahlen) vor andern Systemen linear unabhängiger Zahlen ausgezeichnet wurde.

äußere Ebene für den Körper B. Bezeichnet α einen beliebigen Oberflächenstrahl von A_0, also auch einen beliebigen Oberflächenpunkt des konvexen Körpers A, so wird für jeden Innenstrahl β von B_0 $\alpha\beta < 0$, da man hier $\alpha\beta = \alpha\beta_1 + \cdots + \alpha\beta_n$ setzen kann, wo $\beta_1, \ldots \beta_n$ unabhängige Strahlen aus B sind. Dagegen muß wenigstens für einen Oberflächenstrahl β von B $\alpha\beta = 0$ werden. Bezeichnet nämlich $\gamma\xi = 0$ die Gleichung einer durch α gehenden Stützebene von A_0, und ist γ so gewählt, daß die Strahlen aus A_0 auf der $-\gamma$-Seite der Ebene liegen, so gilt $\gamma\alpha = 0$, und es ist, wenn ξ die Strahlen aus A_0 durchläuft, stets $\gamma\xi \leqq 0$, was besagt, daß γ dem Strahlsystem B angehört. Wir können also $\gamma = \beta$ setzen und erhalten dann $\alpha\beta = 0$. Dies zeigt, daß in $\mathfrak{P}$ die Polarebene eines Oberflächenpunktes von A Stützebene von B ist. Bezeichnet endlich α in $\mathfrak{P}$ einen Punkt außerhalb des Körpers A, so gehört in $\mathfrak{E}$ keiner der Strahlen α, $-\alpha$ zu A_0, und es wird daher, wenn ξ B_0 durchläuft, sowohl $\alpha\xi$ wie $-\alpha\xi$ positive Werte annehmen können. Es liegen daher zu beiden Seiten der durch $\alpha\xi = 0$ definierten Ebene Strahlen von B_0, die Ebene ist eine schneidende, und da den in ihr gelegenen Innenstrahlen von B_0 in $\mathfrak{P}$ innere Punkte von B entsprechen, so folgt: Die Polarebene eines außerhalb des Körpers A gelegenen Punktes schneidet den Körper B.

Da sich jede Korrelation, die den ganzen projektiven Raum $\mathfrak{P}$, also das System $\{0, P\}$ betrifft, aus einer Kollineation und derjenigen Korrelation zusammensetzen läßt, welche die polaren Elemente vertauscht, so ergibt sich, *daß durch eine beliebige Korrelation die Systeme der inneren, äußeren und Oberflächenpunkte eines konvexen* $(n-1)$*-dimensionalen Körpers* A *in die Systeme der äußeren, schneidenden und stützenden Ebenen eines ebensolchen Körpers* B *übergeführt werden. Zugleich gehen die äußeren, schneidenden und stützenden Ebenen von* A *in die inneren, äußeren und Oberflächenpunkte desselben Körpers* B *über.* Denn eine Stützebene von A muß, da sie keinen innern, aber wenigstens einen Oberflächenpunkt von A enthält, in einen solchen Punkt übergehen, der in keiner äußeren, aber wenigstens in einer stützenden Ebene von B liegt, d. h. in einen Oberflächenpunkt von B. — Nach unserer oben gegebenen Definition konvexer Teilsysteme in einem beliebigen linearen projektiven System ist *ein konvexes* $(n-1)$*-dimensionales System im projektiven Ebenenraum* $\{0, P\}_2$, wie jetzt ersichtlich, *nichts anderes als das System der* (*stützenden und äußeren*) *Schranken eines kon-*

vexen $(n-1)$-dimensionalen Körpers. Ebenso ergibt sich als konvexes r-dimensionales Teilsystem in einem linearen System $\{0, \mathsf{B}\}_2$ das System derjenigen $\{0, \mathsf{B}\}_2$ angehörigen Elemente, welche Schranken eines in $\{0, \mathsf{B}\}_1$ enthaltenen konvexen r-dimensionalen Körpers sind. Was endlich die allgemeineren Systeme $|\mathsf{A}, \Gamma|$ betrifft, so ergibt sich aus der Möglichkeit, sie auf Systeme $|0, \mathsf{B}|$ perspektiv zu beziehen, und aus dem Umstande, daß dabei konvexen und abgeschlossenen Systemen ebensolche Systeme entsprechen, die folgende allgemeine Konstruktion konvexer abgeschlossener Teilsysteme von $|\mathsf{A}, \Gamma|_1$ und $|\mathsf{A}, \Gamma|_2$: Man nehme ein zu $|\mathsf{A}, \Gamma|$ perspektives System $|0, \mathsf{B}|$ und in $|0, \mathsf{B}|_1$ einen konvexen Körper an und verbinde die Punkte dieses Körpers, sowie diejenigen Elemente aus $|0, \mathsf{B}|_2$, welche Stützen des Körpers sind, mit A.

Sind $\alpha_1, \dots \alpha_n$ linear unabhängige Zahlen, so gilt dasselbe für die durch die Gleichungen

$$\alpha_i \beta_k = 0 \text{ für } i \neq k, \quad \alpha_i \beta_i = -1 \qquad (i, k = 1, \dots n)$$

definierten Zahlen $\beta_1, \dots \beta_n$. Wird $\mathsf{A}_0 = T(\alpha_1, \dots \alpha_n)$, $\mathsf{B}_0 = T(\beta_1, \dots \beta_n)$ gesetzt, so ist für jedes Zahlenpaar α, β aus A_0 und B_0 $\alpha\beta \leqq 0$. Ist ferner γ eine solche Zahl, daß $\gamma\xi$, wenn ξ das System B_0 durchläuft, stets $\leqq 0$ wird, so ergibt sich, wenn

$$\gamma = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$$

gesetzt wird,

$$c_i = -(c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n)\beta_i = -\gamma\beta_i \geqq 0.$$

Daraus folgt, daß γ zu A_0 gehört. A_0, B_0 stellen daher in $\mathfrak{E}$ komplementäre Strahlsysteme, in $\mathfrak{P}$ konjugierte Simplexe dar. Der zu einem $(n-1)$-dimensionalen Simplex konjugierte Körper ist also wieder ein solches Simplex. Hieraus ergibt sich weiter, daß ein Simplex innerhalb $|0, \mathsf{P}|_2$ aus allen Ebenen besteht, die mit einem Punktsimplex keinen inneren Punkt gemein haben.

Sind in $\mathfrak{E}$ A und B zwei abgeschlossene Punktmengen ohne gemeinsame Punkte, und ist wenigstens die eine, A, absolut beschränkt, so bleibt der Abstand zweier Punkte ξ, η, welche diese Mengen durchlaufen, oberhalb einer festen positiven Zahl. Denn zunächst hat jeder Punkt ξ der Menge A von B einen kleinsten positiven Abstand $f(\xi)$; $f(\xi)$ aber ist eine stetige Funktion, die innerhalb der abgeschlossenen und absolut beschränkten Punktmenge A ein Minimum erreicht, welches demnach auch positiv ist.

In der projektiven Geometrie, wo die metrischen Begriffe fehlen, kann als Äquivalent für den angeführten Satz der folgende gelten:

Sind im projektiven Raum A und B *zwei abgeschlossene Punktmengen ohne gemeinsame Punkte, so kann man eine endliche Anzahl* $(n-1)$*-dimensionaler Simplexe* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots T_1, T_2, \ldots$ *so bestimmen, daß*

1) *jeder Punkt aus* A *wenigstens in einem Simplex* Σ*, jeder aus* B *wenigstens in einem Simplex* T *enthalten ist, und*

2) *kein Simplex* Σ *mit einem Simplex* T *einen Punkt gemein hat.*

Wir bemerken noch folgendes: Das in der zweiten Forderung ausgesprochene Verbot gemeinsamer Punkte bezieht sich natürlich auch auf die Oberflächenpunkte der Simplexe. Was die erste Forderung betrifft, so ist es gleichgiltig, ob man verlangt, daß jeder Punkt aus A bzw. B innerer Punkt eines Simplexes Σ bzw. T sein soll, oder ob man auch die Lage auf der Oberfläche gelten läßt. Entscheidet man sich für das zweite, so darf man dafür die weitere Forderung stellen, daß auch die Simplexe desselben Systems Σ oder T nicht übereinander greifen, d. h. höchstens Oberflächenpunkte gemein haben sollen. — Beim Beweise bedienen wir uns der Abbildung des Punktraumes $\mathfrak{P}$ auf die Oberfläche $\xi^2 = 1$ der Einheitskugel in $\mathfrak{E}$, bei welcher jedem Punkt α von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{E}$ das Punktepaar $\pm\frac{\alpha}{|\alpha|}$ zugeordnet ist. Den Punktmengen A, B aus $\mathfrak{P}$ entsprechen auf der Kugelfläche zwei abgeschlossene Punktmengen A_1, B_1 ohne gemeinsame Punkte. Da A_1, B_1 auch absolut beschränkt sind, so kann man $p > 0$ so wählen, daß jeder Punkt aus A_1 von jedem Punkte aus B_1 einen Abstand $\geqq p$ hat. Wir wählen nun ein System Γ von endlichvielen Punkten auf der Kugelfläche $\xi^2 = 1$ so aus, das jeder Punkt dieser Fläche vom nächsten Punkt aus Γ einen Abstand $\leqq \frac{p}{8}$ hat. Dies können wir zum Beispiel dadurch erreichen, daß wir, wie in § 24, einen der Kugel umbeschriebenen Würfel durch n Systeme von Parallelebenen in $(2m)^n$ kongruente Teilwürfel zerlegen und aus jedem Teilwürfel, der im Innern oder auf der Begrenzung Punkte der Kugelfläche enthält, einen solchen für das System Γ auswählen. Wird $m > \frac{8\sqrt{n}}{p}$ angenommen, so ist der Abstand zweier Punkte desselben Teilwürfels stets $< \frac{p}{8}$, und das System Γ hat die verlangten

Eigenschaften. Da diese nicht verloren gehen, wenn wir noch endlichviele Punkte der Fläche $\xi^2 = 1$ hinzunehmen, so dürfen wir voraussetzen, daß der Gegenpunkt $-\gamma$ eines jeden Punktes γ aus Γ wieder zu Γ gehört (also $\Gamma = -\Gamma$ ist) und daß *Md.* $\Gamma = \mathsf{P}$ ist. Wir bezeichnen jetzt die Punkte aus Γ mit $\pm\gamma_1, \pm\gamma_2, \ldots$, wobei $\gamma_1, \ldots \gamma_n$ linear unabhängig sein sollen. Wenn man mit den Punktepaaren $\pm\gamma_i$ auf der Kugelfläche Verrückungen vornimmt, durch welche die Paare in neue $\pm\delta_i$ übergehen, doch so, daß die Verrückungen $|\delta_i - \gamma_i|$ sämtlich $< \frac{p}{8}$ sind, so erhält man ein neues System Δ, und es wird jetzt der Abstand eines beliebigen Punktes der Fläche vom nächsten Punkt aus Δ kleiner als $\frac{p}{4}$ sein. Wir wollen nun das neue System so bestimmen, daß je $n+1$ seiner Punkte keiner Ebene zugleich angehören, sofern sich nicht ein Gegenpunktepaar unter ihnen findet. Dies ist leicht zu erreichen. Wir setzen zunächst $\delta_1 = \gamma_1, \ldots \delta_n = \gamma_n$. Nehmen wir weiter an, es wären $\delta_1, \ldots \delta_k$ $(k \geqq n)$ bereits so bestimmt, daß das System der $2k$ Punkte $\pm\delta_1, \ldots \pm\delta_k$ den angegebenen Bedingungen genügt, und daß es sich jetzt um die Bestimmung von δ_{k+1} handelt. Greifen wir aus den Punkten $\pm\delta_1, \ldots \pm\delta_k$ n solche heraus, unter denen sich kein Gegenpunktepaar befindet, so bestimmen diese eine Ebene Λ. Wir erhalten eine endliche Anzahl $\left(\text{nämlich } m = 2^n\binom{k}{n}\right)$ solche Ebenen Λ, die paarweise in gleichem Abstand vom Nullpunkt und zueinander parallel gelegen sind. Ist γ_{k+1} in keiner dieser Ebenen gelegen, so dürfen wir $\delta_{k+1} = \gamma_{k+1}$ wählen. Ist andernfalls q die Anzahl der Ebenen Λ, die γ_{k+1} enthalten, d der kleinste Abstand des Punktes γ_{k+1} von den übrigen Ebenen Λ, x eine positive Zahl, die beliebig klein, jedenfalls aber $< \frac{d}{2}$ ist, $\alpha(\xi - \gamma_{k+1}) = 0$ die Gleichung einer den Punkt γ_{k+1} enthaltenden Ebene Λ, wobei $\alpha^2 = 1$, $\alpha\gamma_{k+1} \leqq 0$ angenommen werden darf, η eine Zahl, die den Gleichungen $\eta^2 = 1$, $\gamma_{k+1}\eta = 0$ und, falls $\alpha \neq -\gamma_{k+1}$ und mithin von γ_{k+1} linear unabhängig ist, der Ungleichung $\alpha\eta > 0$ genügt, und wird $\xi = \gamma_{k+1}\cos x + \eta \sin x$ gesetzt, so folgt

$$\xi^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$|\xi - \gamma_{k+1}| = |\gamma_{k+1}(\cos x - 1) + \eta \sin x| \leqq 1 - \cos x + \sin x < 2x < d,$$

$$\alpha(\xi - \gamma_{k+1}) = \alpha\gamma_{k+1}(\cos x - 1) + \alpha\eta \sin x > 0.$$

ξ ist also ein Punkt der Kugelfläche, der (weil x beliebig klein ist) einer

beliebig kleinen Umgebung von γ_{k+1} angehört und höchstens auf $q-1$ Ebenen Λ liegt. Daher kann man auf der Kugelfläche den Punkt δ_{k+1} auch so bestimmen, daß $|\delta_{k+1}-\gamma_{k+1}|<\frac{p}{8}$ wird und δ_{k+1} auf keiner Ebene Λ liegt. Das System Δ kann also den angegebenen Bedingungen gemäß gewählt werden und soll nun so angenommen werden. — Aus $\Delta=-\Delta$ folgt $\overline{\Delta}=-\overline{\Delta}$. $\overline{\Delta}$ ist ein konvexes, n-dimensionales, ganz in der Einheitskugel $\xi^2\leqq 1$ enthaltenes Polyeder, das den Nullpunkt im Innern enthält, da die $2n$ Strahlen $\pm\delta_1,\dots\pm\delta_n$ ein allseitiges System bilden. Ist δ ein Punkt aus Δ, so stellt die Gleichung $\delta\xi=1$ die durch δ gehende Tangentialebene der Kugel dar, da für die Punkte ξ der Kugel $\delta\xi=|\xi|\cos(\delta,\xi)\leqq 1$ ist und nur für $\xi=\delta$ der Wert 1 erreicht wird. δ ist also wesentlicher Punkt (§ 28), mithin Ecke des Polyeders, und Δ das System der sämtlichen Ecken. Eine Polyederebene kann, da der Nullpunkt innerer Punkt ist, kein Punktpaar $\pm\delta_i$ und daher, zufolge der Bedingung, die bei der Wahl der Punkte δ_i zu beachten war, nicht mehr als n Ecken δ_i enthalten. Da sie aber durch die in ihr gelegenen Ecken eindeutig bestimmt ist, so enthält sie genau n Ecken. Die diese Ecken bezeichnenden Zahlen sind linear unabhängig. Wir betrachten eine beliebige Polyederebene; die in ihr gelegenen Ecken sollen wieder $\delta_1,\dots\delta_n$ heißen. Die in der Ebene gelegene Polyederfläche besteht aus den Punkten

$$c_1\delta_1+\cdots+c_n\delta_n \qquad (c_1\geqq 0,\dots c_n\geqq 0;\ c_1+\cdots+c_n=1),$$

stellt also ein $(n-1)$-dimensionales Simplex dar. Die nach den Punkten der Fläche gehenden Strahlen des Ursprungs 0 bilden ein Strahlsystem, das durch die Zahlenmenge $\Delta_0=T(\delta_1,\dots\delta_n)$ bezeichnet wird, die andererseits in $\mathfrak{P}$ ein $(n-1)$-dimensionales Simplex darstellt. Dabei entspricht jedem inneren Punkt der Fläche ein innerer Strahl des Strahlsystems und diesem in $\mathfrak{P}$ ein innerer Punkt des Simplexes und umgekehrt. Der Gegenfläche mit den Ecken $-\delta_1,\dots-\delta_n$ entspricht das Strahlsystem $-\Delta_0$, welches in $\mathfrak{P}$ dasselbe Simplex bezeichnet. Jedem nicht zu Δ_0 oder $-\Delta_0$ gehörigen Punkt in $\mathfrak{E}$ entspricht in $\mathfrak{P}$ ein Punkt außerhalb des Simplexes. Da jeder Strahl in $\mathfrak{E}$ die Oberfäche des Polyeders in einem Punkte schneidet, und dieser wenigstens einer Polyederfläche angehört, da ferner jeder Punkt im Innern einer Polyederfläche auf keiner andern liegt, so erfüllen die den Flächenpaaren des Polyeders in $\mathfrak{P}$ entsprechenden Simplexe den ganzen

projektiven Raum und haben keine inneren Punkte gemein. — Es sei α die Richtung, c die Länge des Lotes vom Nullpunkt auf die Polyederebene Λ, welche die Ecken $\delta_1, \ldots \delta_n$ enthält. Dann ist $0 < c < 1$, $c\alpha$ der Fußpunkt des Lotes, $\alpha\xi = c$ die Gleichung der Ebene Λ, und die Ungleichung $\alpha\xi \leqq c$ stellt den Halbraum dar, welcher das Polyeder enthält. Für eine Polyederecke δ erhält man

$$(8.) \qquad \alpha\delta \leqq c, \ (\delta - \alpha)^2 \geqq 2(1-c),$$

wobei die Gleichheitszeichen für die in Λ liegenden Ecken gelten. Für die Punkte ξ, in denen das Strahlsystem Δ_0 die Kugelfläche schneidet, erhält man dagegen

$$(9.) \qquad \alpha\xi \geqq c, \ (\xi - \alpha)^2 \leqq 2(1-c),$$

wobei die Gleichheitszeichen wieder nur für die in Λ gelegenen Ecken gelten. Denn die Strahlen nach den Punkten ξ schneiden die Ebene Λ zwischen 0 und ξ. Da der Abstand des Punktes α vom nächsten Punkt aus Δ kleiner als $\frac{p}{4}$ ist, so folgt aus (8.) $\sqrt{2-2c} < \frac{p}{4}$, aus (9.) $|\xi - \alpha| < \frac{p}{4}$, und hieraus für zwei Punkte ξ_1, ξ_2 des Durchschnitts von Δ_0 mit der Kugelfläche

$$|\xi_2 - \xi_1| < \frac{p}{2}.$$

Betrachten wir jetzt in $\mathfrak{P}$ noch ein zweites von den Simplexen, in welche $\mathfrak{P}$ eingeteilt wurde. Wenn dieses mit dem durch Δ_0 bezeichneten einen Punkt gemein hat, so entsprechen ihm in $\mathfrak{E}$ zwei konvexe Strahlsysteme $\pm\Delta_1$, von denen das eine, etwa Δ_1, mit Δ_0 einen Strahl gemein hat. Ist dann ξ' der Schnittpunkt dieses Strahles mit der Kugelfläche, so folgt für zwei Punkte ξ_0 und ξ_1, in denen die Fläche von einem Strahl aus Δ_0 bzw. Δ_1 geschnitten wird,

$$|\xi_0 - \xi'| < \frac{p}{2}, \quad |\xi_1 - \xi'| < \frac{p}{2}, \quad |\xi_1 - \xi_0| < p.$$

Durch die letzte Ungleichung wird der Fall ausgeschlossen, daß einer der Punkte ξ_0, ξ_1 zu A_1, der andere zu B_1 gehört, und damit die Möglichkeit, daß von den beiden Simplexen in $\mathfrak{P}$ das eine einen Punkt aus A, das andere einen Punkt aus B enthält. *Wir haben also eine Einteilung des Raumes $\mathfrak{P}$ in endlichviele Simplexe, bei denen zwei Simplexe, von denen das eine Punkte aus A, das andere Punkte aus B enthält, keinen gemeinsamen Punkt haben.* Damit ist unser Satz bewiesen. — Hat man in $\mathfrak{P}$ ein System von endlichvielen Simplexen ohne gemeinsame Punkte, so werden

in $\mathfrak{E}$ die entsprechenden Stücke der Kugelfläche einen positiven Minimalabstand haben. Hieraus ergibt sich leicht die Möglichkeit, die Simplexe zu solchen zu vergrößern, die die ursprünglichen ganz im Innern enthalten und auch keine gemeinsamen Punkte haben. Daher wird es auch möglich, die in unserem Satze mit Σ, T bezeichneten Simplexe so zu wählen, daß jeder Punkt aus A bzw. B im Innern wenigstens eines der Simplexe Σ bzw. T liegt, wobei aber natürlich ein Übereinandergreifen der Simplexe desselben Systems im allgemeinen unvermeidlich ist.

§ 32. Der projektive Raum als Erweiterung des *Euclid*ischen.

Die Erweiterung des *Euclid*ischen n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{E}_n$ zum projektiven n-dimensionalen Raum $\mathfrak{P}_n$, durch Einführung *uneigentlicher Elemente*, läßt sich rechnerisch so darstellen. Man erweitert das komplexe System $P = P_n$ von n Einheiten, dessen Zahlen die Punkte von $\mathfrak{E}_n$ bezeichneten, durch Hinzunahme einer neuen unabhängigen Einheit ε_0 zu einem System P_{n+1}. Ein Punkt aus $\mathfrak{E}_n$, der bisher durch die Zahl ξ bezeichnet wurde, wird jetzt durch den Modul mit der Basis $\varepsilon_0 + \xi$ dargestellt. Man erhält so gerade alle die Moduln vom Range 1, die nicht in dem Modul P_n enthalten sind. Die in P_n enthaltenen Moduln vom Range 1 repräsentieren die „uneigentlichen" Punkte. Sie stellen insgesamt einen projektiven Punktraum $\mathfrak{P}_{n-1}$ von $n-1$ Dimensionen dar, der $\mathfrak{E}_n$ hinzugefügt den Raum $\mathfrak{P}_n$ ergibt und in diesem die Rolle einer Ebene (der uneigentlichen Ebene) spielt. — Eine lineare r-dimensionale Mannigfaltigkeit Λ aus $\mathfrak{E}_n$ wird durch $r+1$ Punkte bestimmt. Die ihnen früher beigeordneten Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_r$ waren der Einschränkung unterworfen, durch keine lineare Relation $a_0\alpha_0 + \cdots + a_r\alpha_r = 0$ mit verschwindender Koeffizientensumme verbunden zu sein, und die Zahlen

$$c_0\alpha_0 + \cdots + c_r\alpha_r \qquad (c_0 + \cdots + c_r = 1)$$

gaben die Punkte von Λ. Die einschränkende Bedingung für die Zahlen $\alpha_0, \dots \alpha_r$ läßt sich jetzt so ausdrücken: es müssen die Zahlen $\varepsilon_0 + \alpha_0, \dots \varepsilon_0 + \alpha_r$ linear unabhängig sein. Der Modul M, welchen diese Zahlen alsdann bestimmen, bezeichnet in $\mathfrak{P}_n$ ein Element vom Index $r+1$, und die in diesem gelegene Punktmenge ist, soweit sie $\mathfrak{E}_n$ angehört, mit Λ identisch. Die übrigen, in $\mathfrak{P}_{n-1}$ gelegenen Punkte konstituieren eine lineare projektive

Mannigfaltigkeit von $r-1$ Dimensionen. Den linearen Mannigfaltigkeiten Λ von $\mathfrak{E}_n$ entsprechen alle Elemente M von $\mathfrak{P}_n$ mit Ausnahme der in $\mathfrak{P}_{n-1}$ gelegenen, welche uneigentliche heißen. Die zwei parallelen Mannigfaltigkeiten entsprechenden Elemente von $\mathfrak{P}_n$ sind, wie leicht zu sehen, solche, welche dieselben uneigentlichen Punkte enthalten.

Ein Vergleich der für die Begriffe der *Euclid*ischen und projektiven Geometrie gegebenen Definitionen läßt folgendes erkennen. Eine ganz in $\mathfrak{E}_n$ enthaltene Punktmenge A, die, als Punktmenge von $\mathfrak{E}_n$ betrachtet, ein Simplex bzw. eine konvexe Menge ist, ist auch, in $\mathfrak{P}_n$ betrachtet, Simplex bzw. konvex, und umgekehrt. Ebenso wird ein in $\mathfrak{E}_n$ gelegener Punkt, der in $\mathfrak{E}_n$ als Häufungsstelle von A gilt, auch in $\mathfrak{P}_n$ als solche gelten und umgekehrt. Daraus folgt weiter, daß eine ganz in $\mathfrak{E}_n$ gelegene Punktmenge, die als Punktmenge in $\mathfrak{P}_n$ abgeschlossen ist, auch in $\mathfrak{E}_n$ als abgeschlossen gilt. Umgekehrt ist aber, wenn A in $\mathfrak{E}_n$ als abgeschlossen vorausgesetzt wird, damit nur ausgedrückt, daß nicht zu A gehörige Häufungspunkte in $\mathfrak{E}_n$ nicht existieren. Damit A auch in $\mathfrak{P}_n$ als abgeschlossen gelte, ist noch erforderlich, daß A auch außerhalb $\mathfrak{E}_n$, d. h. in $\mathfrak{P}_{n-1}$ keinen Häufungspunkt hat. Es ergibt sich leicht: *Eine ganz in $\mathfrak{E}_n$ gelegene, daselbst abgeschlossene Punktmenge A ist dann und nur dann auch in $\mathfrak{P}_n$ abgeschlossen, wenn sie absolut beschränkt ist.* Denn wenn A in $\mathfrak{P}_n$ abgeschlossen ist, so kann man, da auch die Menge aller Punkte in $\mathfrak{P}_{n-1}$ abgeschlossen ist und der Voraussetzung nach mit A keinen Punkt gemein hat, A in eine endliche Anzahl von Simplexen einschließen, die keinen Punkt von $\mathfrak{P}_{n-1}$ enthalten (§ 31), also ganz in $\mathfrak{E}_n$ liegen. Da die Anzahl der Ecken dieser Simplexe endlich ist, so läßt sich um den Nullpunkt eine Kugel beschreiben, welche die Ecken der Simplexe, diese selbst und somit A einschließt. A ist also absolut beschränkt. Setzt man umgekehrt A als absolut beschränkt voraus, so kann man A in ein ganz in $\mathfrak{E}_n$ gelegenes Simplex Σ einschließen. Da dieses auch in $\mathfrak{P}_n$ Simplex und mithin abgeschlossen ist und keinen Punkt mit $\mathfrak{P}_{n-1}$ gemein hat, so kann ein Punkt von $\mathfrak{P}_{n-1}$ nicht Häufungspunkt von Σ und a fortiori nicht Häufungspunkt von A sein. A ist also auch, in $\mathfrak{P}_n$ betrachtet, abgeschlossen. — Damit ist auch gezeigt, daß eine ganz in $\mathfrak{E}_n$ gelegene Punktmenge, die in einem der Räume $\mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{P}_n$ einen konvexen Körper darstellt, auch im andern ein solcher ist.

Um die Ausdrucksweise zu erleichtern, werden wir im folgenden in der Bezeichnung keinen Unterschied machen zwischen einer linearen Mannigfaltigkeit Λ aus $\mathfrak{E}_n$ und dem projektiven Raumelement, welches die Punkte aus Λ und keine anderen Punkte aus $\mathfrak{E}_n$ enthält. — Wir betrachten in $\mathfrak{E}_n$ ein konvexes, abgeschlossenes Strahlsystem Σ_1 von der Dimension n und der Stufe $s \leqq n-2$. Es sei A der totale Ursprung von Σ_1, Σ das System derjenigen Elemente aus $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_1$, in denen die $(s+1)$-dimensionalen Halbmannigfaltigkeiten liegen, aus denen sich das Strahlsystem Σ_1 zusammensetzt, T das System der Stützebenen von Σ_1. Ist Λ eine äußere Stützebene von Σ_1, d. h. eine solche, die mit Σ_1 nur den Ursprung A gemein hat (§ 19), B_1 eine $(n-1-s)$-dimensionale lineare in Λ gelegene Mannigfaltigkeit, die mit A einen und nur einen eigentlichen Punkt gemein hat, B eine zu B_1 parallele Mannigfaltigkeit, die in demselben von Λ begrenzten Halbraum liegt wie das Strahlsystem Σ_1, so ist $[\mathsf{A}, \mathsf{B}_1] = \Lambda$, $[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = \mathfrak{P}_n$, $(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = 0$, und es besteht zwischen $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}$ und $\{0, \mathsf{B}\}$ eine perspektive Beziehung. Jedes Element aus $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_1$ schneidet B in einem Punkte, und insbesondere schneidet jedes zu Σ gehörige Element B in einem zu Σ_1 gehörigen Punkte, der ein eigentlicher ist, weil die Verbindung von A mit einem uneigentlichen Punkte von B (oder B_1) ganz in Λ liegt, also außerhalb A keinen Punkt von Σ_1 enthält. Diese eigentlichen Punkte bilden einen konvexen Körper Σ_0 von $n-1-s$ Dimensionen. Ebenso gehört jedes Element aus T (jede Stützebene von Σ_1) zu $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_2$ und schneidet B einer $(n-2-s)$-dimensionalen Schranke von Σ_0, wobei die äußeren Stützebenen von Σ_1 den äußeren Schranken von Σ_0 entsprechen. Nachdem in § 30 die Begriffe konvex und abgeschlossen für beliebige lineare Systeme eingeführt worden sind, können wir sagen, daß Σ und T konvexe abgeschlossene $(n-1-s)$-dimensionale Teilsysteme der $((n-1-s)$-dimensionalen) Systeme $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_1$ und $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_2$ sind. Ein Element M aus $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}$, das mit Σ_1 nur die Punkte des totalen Ursprungs A gemein hat, also kein Element aus Σ enthält, schneidet B in einem Element, das mit dem konvexen Körper Σ_0 keinen Punkt gemein hat, durch welches sich also eine äußere Schranke von Σ_0 legen läßt (§ 27, 2). Die dieser äußeren Schranke entsprechende äußere Stützebene von Σ_1 geht durch M. Wir können dieses Resultat so formulieren: *Durch eine durch den totalen Ursprung von* Σ_1 *gehende lineare Mannigfaltigkeit, die mit* Σ_1 *nur die Ur-*

sprungspunkte gemein hat, läßt sich stets eine äußere Stützebene von Σ_1 ***legen.*** Durch eine Korrelation des ganzen projektiven Raumes wird T in einen konvexen Körper, Σ in das System der $((n-2-s)$-dimensionalen) Schranken dieses Körpers verwandelt. Die innern Punkte des Körpers entsprechen dabei denjenigen Ebenen von T, welche in bezug auf Σ_1 äußere Schranken hießen, in bezug auf T selbst aber als *innere* Elemente zu bezeichnen sind. — Man sieht leicht, daß man jedes konvexe abgeschlossene Teilsystem Σ bzw. T eines Systems $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_1$ oder $\{\mathsf{A}, \mathfrak{P}_n\}_2$, worin A ein eigentliches Element bedeutet (zweimal) erhalten kann, indem man in der hier beschriebenen Weise von einem n-dimensionalen konvexen und abgeschlossenen Strahlsystem Σ_1 ausgeht. Man erhält Σ_1, wenn man von der Menge aller in den Elementen von Σ enthaltenen Punkte die uneigentlichen fort läßt und ebenso diejenigen, welche auf der einen Seite einer inneren Ebene aus T liegen, oder, noch einfacher, als Durchschnitt aller Halbräume, die von den Ebenen aus T begrenzt werden und einen auf keiner dieser Ebenen gelegenen Punkt gemein haben. — In genau derselben Beziehung stehen die r-dimensionalen konvexen abgeschlossenen Strahlsysteme zu den konvexen abgeschlossenen Teilen der Systeme von der Form $\{\mathsf{A}, \Gamma\}_1$, $\{\mathsf{A}, \Gamma\}_2$, in denen Γ ein Element vom Index $r+1$ bezeichnet.

Nun läßt sich auch leicht für die Dualität verschiedener, bei der Behandlung konvexer Körper auftretender Begriffe der Nachweis vollständig führen. Durch eine Korrelation in $\mathfrak{P}_n$ wird, wie oben gezeigt wurde, einem n-dimensionalen Körper A ein zweiter B in der Weise zugeordnet, daß die inneren, äußeren und Oberflächenpunkte des einen, den äußeren, schneidenden und stützenden Ebenen des andern wechselweise entsprechen. Hieraus und aus den Sätzen § 27, 1. und 2. folgt sofort, daß allgemein jedem Stützelement von A ein Stützelement von B entspricht, während jedem bezüglich A äußeren Element ein B schneidendes, jedem A schneidenden Element ein bezüglich B äußeres zugeordnet ist. — Es sei Λ ein Element, das A nicht schneidet. Dann gehen durch Λ Schranken (Schranke = stützende oder äußere Ebene) von A. Das von ihnen konstituierte System T ist abgeschlossen und konvex; denn es wird durch die Korrelation in die Punktmenge übergeführt, welche das Λ entsprechende Element Λ_1 mit B gemein hat; und diese ist abgeschlossen und konvex. Nehmen wir an, daß A ganz in $\mathfrak{E}_n$ liegt und Λ eigentliches Element ist, und bezeichnen

wir mit Σ_1 das kleinste abgeschlossene A enthaltende Strahlsystem vom Ursprung Λ. Jede Stützebene von Σ_1 ist Schranke von A. Es ist aber auch jede durch Λ gehende Schranke von A eine Stützebene von Σ_1; denn der von der Schranke begrenzte Halbraum, in welchem A liegt, stellt selbst ein (konvexes) abgeschlossenes Strahlsystem vom Ursprung Λ dar, muß also Σ_1 enthalten. T ist also das System der Stützebenen von Σ_1. Die Dimension k von T ist, wie vorhin gezeigt wurde, $= n - 1 - s$, wenn s die Stufe von Σ_1 bezeichnet. Im Falle, daß Λ Stützelement ist, wurde aber in § 27 die durch die Gleichung $k = n - 1 - s$ gegebene Zahl k als die Klasse von Λ bezeichnet, so daß also die Klasse eines Stützelementes Λ auch erklärt werden kann als die Dimension des Systems T der durch Λ gehenden Schranken; welche Erklärung auch für den Fall, daß A uneigentliche Punkte enthält und Λ uneigentliches Element ist, gelten soll. Die Zahl k ist zugleich die Dimension der Punktmenge, die B mit Λ_1 gemein hat, also die Ordnung des Stützelementes Λ_1 von B. So ergibt sich die Dualität von Ordnung und Klasse.

Ist K *ein konvexer n-dimensionaler Körper,* Φ *das System der Schranken von* K, T *ein konvexes Teilsystem von* Φ, *so kann ein inneres Element* Γ *von* T *mit* K *nur solche Punkte gemein haben, die dem Durchschnitt* Δ *aller Ebenen aus* T *angehören.*

Betrachten wir nämlich eine Korrelation, durch welche ein innerer Punkt von K in die uneigentliche Ebene übergeht, so wird diese für den Körper Θ, in welchen Φ übergeht, äußere Schranke sein, d. h. Θ ist ganz in $\mathfrak{E}_n$ gelegen. Die Korrelation führe Δ in Δ_1, T in T_1, die Ebene Γ in den Punkt γ über. T_1 stellt einen in Δ_1 gelegenen konvexen Teil des Körpers Θ und γ einen inneren Punkt von T_1 dar. Eine durch γ gehende Ebene enthält entweder alle Punkte von T_1; oder diese Punkte liegen zu verschiedenen Seiten der Ebene, und dann schneidet die Ebene den Körper Θ. Daraus folgt: Ein in Γ gelegener Punkt liegt entweder in allen Ebenen von T, gehört also Δ an, oder er liegt außerhalb K. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Wir beweisen jetzt:

Die in § 29 *für den Begriff „relativ äußeres Element" gegebene Definition ist mit der folgenden äquivalent: Ein Element* Λ *ist relativ äußeres Element des konvexen Körpers* K, *wenn durch* Λ *eine Ebene* Γ *geht, die*

inneres Element eines abgeschlossenen konvexen Teilsystems T ***des Schrankensystems*** Φ ***von*** K ***ist, und*** Λ ***nicht in allen Ebenen von*** T ***(im Durchschnitt dieser Ebenen) liegt.***

Beim Beweise werden wir K in $\mathfrak{E}_n$ gelegen und Λ als eigentliches Element annehmen, da nur für diesen Fall die frühere Definition gegeben wurde. Zunächst ist klar, daß jedes (im absoluten Sinne) äußere Element Λ auch nach der neuen Definition zu den relativ äußeren gehört. Denn man kann durch Λ eine äußere Schranke Γ legen, in dieser einen Punkt ω, der, falls Λ ein Punkt ist, von Λ verschieden sein muß, annehmen, und erhält dann als ein System T der verlangten Art das System der durch ω gehenden Schranken von K. Für dieses ist nämlich ω der Durchschnitt und Γ ein inneres Element. — Es sei jetzt Λ ein Stützelement. Nehmen wir zuerst an, Λ sei nach der alten Definition ein relativ äußeres Element. Dann haben wir ein K enthaltendes konvexes abgeschlossenes Strahlsystem Σ_1, mit dem Λ nur Ursprungspunkte gemein hat. Λ ist ferner nicht im totalen Ursprung Λ_1 von Σ_1 gelegen. Hieraus, und weil Λ kein Punkt ist (§ 29, 1.), folgt, daß die Stufe von $\Sigma_1 \leqq n-2$ sein muß. Bezeichnet ξ einen Punkt, der sich außerhalb Λ_1 bewegt, so gehört, falls ξ in Σ_1 liegt, die durch ξ gehende Halbmannigfaltigkeit Ξ vom Ursprung Λ_1 ganz der Punktmenge Σ_1 an. Bewegt sich ξ in dem Verbindungselement $\mathsf{M} = [\Lambda, \Lambda_1]$, so liegen, wie leicht zu sehen, in Ξ stets Punkte, die zu Λ, aber nicht zu Λ_1 und mithin auch nicht zu Σ_1 gehören. Die durch Λ_1 gehende Mannigfaltigkeit M hat also mit Σ_1 nur die Punkte des Ursprungs Λ_1 gemein. Daher läßt sich, wie früher gezeigt wurde, durch M eine äußere Stützebene Γ von Σ_1 legen. Durch Λ geht also eine Ebene Γ, die inneres Element des Systems T der Stützebenen von Σ_1, also eines konvexen abgeschlossenen Teilsystems von Φ ist; und Λ liegt nicht in Λ_1, dem Durchschnitt der Ebenen aus T. $\overline{\Lambda}$ ist somit auch nach der neuen Definition ein relativ äußeres Element. — Nehmen wir jetzt an, Λ sei nach der neuen Definition ein relativ äußeres Element. Wir bezeichnen dann mit Γ eine durch Λ gehende Ebene, die inneres Element eines konvexen Teilsystems T von Φ ist, in dessen Durchschnitt Λ_1 das Element Λ nicht liegt. Dann müssen nach dem oben bewiesenen Hilfssatz alle Punkte, die Γ mit K gemein hat, in Λ_1 liegen. Da Γ das Stützelement Λ enthält, muß es solche Punkte geben; und da K nur eigentliche Punkte enthält, ist Λ_1 ein eigentliches Element. T ist kon-

vexer abgeschlossener Teil des Systems $|\Lambda_1, \mathfrak{P}_n|_2$, also das System der Stützebenen eines Strahlsystems Σ_1, das man als Durchschnitt aller Halbräume erhalten kann, die von den Ebenen aus T begrenzt werden und einen Punkt ω, der auf keiner Ebene aus T liegt und sonst willkürlich genommen werden kann, gemein haben. Wählt man ω als Punkt von K, so ist der ganze Körper K in Σ_1 enthalten. Λ_1 ist der totale Ursprung von Σ_1; er enthält alle Punkte, die Γ mit Σ_1 gemein hat, aber nicht das Element Λ. Dieses ist also auch nach der früheren Definition ein relativ äußeres.

Soll bei einer Korrelation, welche dem Körper K einen Körper Θ zuordnet, also Φ in Θ überführt, ein Element N, das wir als zu Θ gehörig betrachten, einem relativ äußeren Element Λ von K entsprechen, so muß die folgende zu der in der neuen Definition relativ äußerer Elemente enthaltenen Bedingung reziproke Bedingung erfüllt sein: Es muß in N ein Punkt γ liegen, der innerer Punkt eines konvexen abgeschlossenen Teils T_1 von Θ ist, der nicht vollständig in N liegt. Mit anderen Worten: N muß einen konvexen Teil von Θ schneiden, also ein relativ schneidendes Element von Θ sein. *Somit ergibt sich die Dualität der Begriffe: „relativ schneidendes" und „relativ äußeres" Element*, und aus ihr folgt, *daß bei Korrelationen sich die wesentlichen Elemente mit den Tangenten vertauschen.*

Über trigonometrische Polynome.

Von Herrn *Leopold Fejér* in Budapest.

Einleitung.

Herr *C. Carathéodory* hat in neuerer Zeit bekanntlich wichtige Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer unendlichen *Fourier*schen Reihe (oder besser: einer unendlichen harmonischen Entwickelung) und dem Wertevorrat der dargestellten Funktion aufgedeckt.

Neben den scharfen analytischen Lösungen der verschiedenen hierhergehörigen Fragen durch Herrn *Carathéodory* sind dann besonders wesentlich die sehr eleganten algebraischen Lösungen des Herrn *O. Toeplitz*.

Der Inhalt vorliegender Arbeit gehört zu dem eben berührten Gedankenkreise. Es werden in ihr die elementarsten, zu diesem Gebiete gehörigen Fragen erörtert.

Insbesondere ist das Ziel dieser Arbeit darzulegen, wie gewisse Sätze über *unendliche* trigonometrische Entwickelungen im Falle einer *endlichen* trigonometrischen Entwickelung, d. h. im Falle eines trigonometrischen Polynoms gegebener Ordnung *präzisiert* werden können. Im Anhange wird gezeigt, daß gewisse *Tschebyscheff*sche Sätze auch eigentlich hierhergehören.

Die ganz elementare, algebraische Grundlage, die für die Lösung meiner in den §§ 3, 4 behandelten Probleme geeignet ist, und welche in den §§ 1, 2 dieser Arbeit auseinandergesetzt ist, habe ich schon im Jahre 1910 gefunden. Ich habe sogleich verschiedene Anwendungen abgeleitet, aber es fehlte mir noch der Beweis eines wichtigen Umkehrungstheorems. Dieser Beweis wurde durch Herrn *Friedrich Riesz* in einfacher

Weise erbracht*). Ich bemerke noch, daß ich mehrere *Resultate* dieser Arbeit auch durch zwei andere *Methoden* abgeleitet habe und diese in meinen Noten „Sur les polynomes harmoniques“ (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, t. 157, p. 506, séance du 29 septembre 1913), „Sur les polynomes trigonométriques“ (l. c., t. 157, p. 571, séance du 13 octobre 1913) veröffentlicht habe.

§ 1.

Darstellung eines beliebigen nichtnegativen trigonometrischen Polynoms n-ter Ordnung als Quadrat der Absolutwerte einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades der komplexen Variabeln z auf dem Kreise $|z| = 1$.

1. Es sei

$$(1.) \qquad \gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \cdots + \gamma_n z^n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k z^k$$

eine ganze rationale Funktion der komplexen Variabeln z mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Es sei

$$\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \bar{\gamma}_k = \alpha_k - i\beta_k. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Ich bilde das Quadrat des absoluten Betrages von $\gamma(z)$ für den Einheitskreis $z = e^{it}$ der z-Ebene (die Veränderliche t ist reell und $0 \leqq t < 2\pi$):

$$(2.) \quad |\gamma(z)|^2_{z=e^{it}} = \Big(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k e^{ikt}\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{n} \bar{\gamma}_l e^{-ilt}\Big) = \sum_{\substack{k=0,1,\ldots n,\\ l=0,1,\ldots n}} \gamma_k \bar{\gamma}_l e^{i(k-l)t}$$

$$= \gamma_0\bar{\gamma}_0 + \cdots + \gamma_n\bar{\gamma}_n + \sum_{r=1}^{n}\Big\{\Big(\sum_{s=0}^{n-r} \gamma_{r+s}\bar{\gamma}_s\Big)e^{rit} + \Big(\sum_{s=0}^{n-r} \bar{\gamma}_{r+s}\gamma_s\Big)e^{-rit}\Big\}$$

$$= \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt,$$

wo

$$(3.) \begin{cases} \lambda_0 = \sum_{s=0}^{n} \gamma_s\bar{\gamma}_s, \\ \lambda_r = \sum_{s=0}^{n-r} (\gamma_{r+s}\bar{\gamma}_s + \bar{\gamma}_{r+s}\gamma_s), \quad \mu_r = i\sum_{s=0}^{n-r} (\gamma_{r+s}\bar{\gamma}_s - \bar{\gamma}_{r+s}\gamma_s), \quad (r=1,2,\ldots n) \end{cases}$$

oder mit den reellen Komponenten α_r, β_r ausgedrückt:

$$(4.) \begin{cases} \lambda_0 = \sum_{s=0}^{n} (\alpha_s^2 + \beta_s^2), \\ \lambda_r = 2\sum_{s=0}^{n-r} (\alpha_{r+s}\alpha_s + \beta_{r+s}\beta_s), \quad \mu_r = 2\sum_{s=0}^{n-r} (\alpha_{r+s}\beta_s - \beta_{r+s}\alpha_s), \quad (r=1,2,\ldots n) \end{cases}$$

---

*) Neuerdings hat Herr *J. Egerváry* einen neuen Beweis für dieses Umkehrungstheorem gefunden.

und schließlich können die Formeln (3.) etwas kondensierter so geschrieben werden:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \lambda_0 = \sum_{s=0}^{n} \gamma_s \bar{\gamma}_s, \\ \lambda_r - i\mu_r = 2\sum_{s=0}^{n-r} \gamma_{r+s}\bar{\gamma}_s. \qquad (r = 1, 2, \dots n) \end{cases}$$

Wir sehen, daß $|\gamma(z)|^2_{z=e^{it}}$ ein reelles trigonometrisches Polynom von t ist von höchstens n-ter Ordnung*). Da nach (5.) $\lambda_n - i\mu_n = 2\gamma_n\bar{\gamma}_0$, ist die Ordnung dieses trigonometrischen Polynoms genau gleich n, wenn γ_0, γ_n beide von Null verschieden sind. Sind die Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_n$ von $\gamma(z)$ alle reell, so ist $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, d. h. das trigonometrische Polynom ist ein reines Kosinuspolynom.

2. Das trigonometrische Polynom unter (2.)

$$\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt$$

ist, seinem Entstehen nach, gewiß für jedes t *nichtnegativ.*

Durchläuft $\gamma(z)$ die Gesamtheit aller ganzen Funktionen von höchstens n-tem Grade, und bilde ich zu jeder das trigonometrische Polynom $|\gamma(z)|^2_{z=e^{it}}$, so erhalte ich eine Menge von nichtnegativen trigonometrischen Polynomen von höchstens n-ter Ordnung.

Ich frage: ist diese Menge von nichtnegativen trigonometrischen Polynomen mit der Gesamtheit *aller* nichtnegativer trigonometrischer Polynome von höchstens n-ter Ordnung identisch? D. h.: gegeben ist ein beliebiges trigonometrisches Polynom

$$(6.)\qquad \tau(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt,$$

welches für jedes reelle t nichtnegativ ist; gibt es dann zu $\tau(t)$ eine ganze rationale Funktion der komplexen Variabeln z

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n,$$

so daß für jedes reelle t

$$|\gamma(z)|^2_{z=e^{it}} = \tau(t)\,?$$

---

*) Ich kann den Inhalt von (5.) auch so aussprechen: Ist

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n,$$

so ist $|\gamma(z)|^2_{z=e^{it}}$ gleich dem reellen Teile für $z = e^{it}$ von

$$C(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \text{ wo}$$

$$c_0 = \sum_{s=0}^{n} \gamma_s\bar{\gamma}_s, \quad c_r = 2\sum_{s=0}^{n-r} \gamma_{r+s}\bar{\gamma}_s. \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

In solcher Weise ist jedem Polynome $\gamma(z)$ ein Polynom $C(z)$ adjungiert.

Die Antwort auf diese Frage ist bejahend, und ich werde sogleich den Beweis dieses Umkehrungssatzes geben. Die Vermutung der Richtigkeit dieses Satzes wurde mir durch die Arbeit des Herrn *O. Toeplitz*: „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen" (Nachr. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl., 1910)*) suggeriert. Die wesentlichsten Anwendungen vorliegender Arbeit (und andere, die ich in einer späteren Arbeit veröffentlichen möchte) waren schon entwickelt, als ich den Satz noch immer nur für einige spezielle Fälle (durch direkte Auflösung des Gleichungssystems (4.)) beweisen konnte. Der folgende allgemeine Beweis rührt von Herrn *F. Riesz* her, dem ich meine Vermutung mündlich mitgeteilt habe. Der *Riesz*sche Beweis lautet (etwas modifiziert, ausgeführt, mit Bemerkungen versehen) folgendermaßen:

Es sei ein beliebiges trigonometrisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung

$$\tau(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt$$

gegeben. Dann ist

$$\tau(t) = \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_\nu \cos \nu t + \mu_\nu \sin \nu t) = \text{reeller Teil von } \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu, \text{ wo}$$

$$c_0 = \lambda_0, \quad c_\nu = \lambda_\nu - i\mu_\nu, \quad z = e^{it}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Also ist

$$\tau(t) = \tfrac{1}{2}\left\{ \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu + \sum_{\nu=0}^{n} \bar{c}_\nu \bar{z}^\nu \right\} = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \left(c_\nu z^\nu + \bar{c}_\nu \frac{1}{z^\nu} \right), \text{ d. h.}$$

$$(7.)\quad \tau(t) = \tfrac{1}{2} e^{-nit} \{ \bar{c}_n + \cdots + \bar{c}_1 z^{n-1} + 2c_0 z^n + c_1 z^{n+1} + \cdots + c_n z^{2n} \}_{z=e^{it}}.$$

Setze ich also

$$(8.)\quad g(z) = \bar{c}_n + \cdots + c_1 z^{n-1} + 2c_0 z^n + c_1 z^{n+1} + \cdots + c_n z^{2n}, \text{ d. h.}$$

$$g(z) = (\lambda_n + i\mu_n) + \cdots + 2\lambda_0 z_n + \cdots + (\lambda_n - i\mu_n) z^{2n},$$

so erhalte ich für jedes trigonometrische Polynom $\tau(t)$ von höchstens n-ter Ordnung:

$$(9.)\qquad |\tau(t)| = \tfrac{1}{2} |g(z)|_{z=e^{it}},$$

wo $g(z)$ die oben angegebene Bedeutung hat**).

---

*) S. § 4, Formel (3.).

**) Beispiel: für

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{2}, \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1, \quad \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$$

gibt Gleichung (9.)

$$\left| \tfrac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt \right| = \tfrac{1}{2} |1 + z + \cdots + z^{2n}|_{z=e^{it}}.$$

(Dies liefert für die sog. n-te *Lebesgue*sche Konstante den Ausdruck:

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + z + \cdots + z^{2n}| \, dt, \qquad z = e^{it}.)$$

Ist speziell $\tau(t) \geqq 0$ für jedes t, so ist $|\tau(t)| = \tau(t)$, also

$$(9'.) \qquad \tau(t) = \tfrac{1}{2}|g(z)|_{z=e^{it}}.$$

Die ganze Funktion $g(z)$ ist höchstens von $2n$-tem Grade. Sie ist genau von $2n$-tem Grade, wenn $c_n \neq 0$, d. h. wenn $\tau(t)$ genau von der n-ten Ordnung ist, was wir nun voraussetzen wollen. (Dann ist zugleich $g(0) \neq 0$). Das Polynom $g(z)$ hat die Spezialität, daß der Koeffizient von z^s und der von z^{2n-s} *konjugierte* komplexe Zahlen sind ($s = 0, 1, 2, \ldots n$). Daraus folgt: ist z ein Punkt der komplexen Zahlenebene, der

$$g(z) = 0$$

befriedigt, so ist auch der auf den Einheitskreis $|z| = 1$ bezügliche konjugierte Pol von z,

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}$$

ein solcher Punkt dieser Zahlenebene, der die Gleichung $g(z) = 0$ befriedigt, d. h. es ist dann auch

$$g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0.$$

In der Tat ist, mit Rücksicht auf (8.),

$$(10.) \qquad g\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{c}_n + \cdots + 2c_0 \frac{1}{\bar{z}^n} + \cdots + c_n \frac{1}{\bar{z}^{2n}}$$

$$= \frac{1}{\bar{z}^{2n}}\{c_n + \cdots + 2c_0 \bar{z}^n + \cdots + \bar{c}_n \bar{z}^{2n}\} = \frac{1}{\bar{z}^{2n}}\overline{g(z)} = 0.$$

Ist also z eine k-fache Wurzel von $g(z) = 0$, so ist auch $\frac{1}{\bar{z}}$ eine k-fache Wurzel von $g(z) = 0$. Wenn nun $|z| \neq 1$, so ist durch $\frac{1}{\bar{z}}$ eine, von z verschiedene, ebenfalls k-fache Wurzel von $g(z) = 0$ gewonnen. Ist aber der absolute Betrag der k-fachen Wurzel z gleich 1, so ist $\frac{1}{\bar{z}} = z$, und ich erhalte so, daß z eine k-fache Wurzel von $g(z) = 0$ ist, was ich schon gewußt habe. Ich kann aber, von anderer Seite her, feststellen, daß in diesem Falle (wo also $|z| = 1$) die Multiplizitätszahl k dieser Wurzel unbedingt eine *gerade* Zahl ist. Ist nämlich für einen Punkt

$$(11.) \qquad z = e^{it}$$

des Einheitskreises $g(z) = 0$, so ist für dieses t wegen (7.)

$$\tau(t) = \tfrac{1}{2} e^{-nit}\{g(z)\}_{z=e^{it}} = 0.$$

Die Multiplizität dieser Wurzel t der Gleichung $\tau(t) = 0$ kann aber nur eine gerade Zahl sein, da doch, nach Voraussetzung, $\tau(t) \geqq 0$ ist für

jedes t. Also ist, wie aus Gleichung (7.) durch wiederholtes Derivieren leicht folgt, auch die Multiplizitätszahl der Wurzel $z = e^{it}$ von $g(z) = 0$ eine gerade Zahl.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß ich mindestens auf eine Weise aus der Gesamtheit der $2n$ Wurzeln der Gleichung

$$(8'.) \quad g(z) \equiv \bar{c}_n + \bar{c}_{n-1} z + \cdots + 2c_0 z^n + \cdots + c_{n-1} z^{2n-1} + c_n z^{2n} = 0$$

eine n-gliedrige „Wurzelgruppe“

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

(die nicht voneinander verschieden sein müssen) so auswählen kann, daß

$$(12.) \qquad z_1, z_2, \ldots z_n, \text{ mit } z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1}, \; z_2^* = \frac{1}{\bar{z}_2}, \; \ldots \; z_n^* = \frac{1}{\bar{z}_n}$$

zusammen die Gesamtheit der $2n$ Wurzeln dieser Gleichung $g(z) = 0$ repräsentieren.

Eine bestimmte, immer durchführbare Vorschrift für die Bildung einer solchen Wurzelgruppe ist die folgende: man schreibe nacheinander diejenigen Wurzeln von $g(z) = 0$ hin, deren absoluter Betrag < 1 ist, u. zw. jede so oft, als Einheiten in ihrer Multiplizität sind. Weiter schreibe man hin diejenigen, deren absoluter Betrag $= 1$ ist, u. zw. jede so oft, als Einheiten in der Hälfte ihrer Multiplizitätszahl sind. (Eine der beiden Sorten von Wurzeln kann natürlich auch ganz fehlen.) Die Gesamtheit dieser Wurzeln von $g(z) = 0$, deren Anzahl notwendigerweise gleich n ist, repräsentiert dann eine „Wurzelgruppe“ $z_1, \ldots z_n$ von $g(z) = 0$, (d. h. $z_1, \ldots z_n$, $\frac{1}{\bar{z}_1}, \ldots \frac{1}{\bar{z}_n}$ repräsentieren alle $2n$ Wurzeln von $g(z) = 0$.)

Ist nun $z_1, z_2, \ldots z_n$ eine Wurzelgruppe, so ist

$$(13.) \quad g(z) = c_n (z - z_1) \cdots (z - z_n)(z - z_1^*) \cdots (z - z_n^*) = c_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \prod_{k=1}^{n} (z - z_k^*).$$

Da aber bekanntlich

$$\left| \frac{z - z_k^*}{z - z_k} \right| = \text{const.}$$

für $|z| = 1$, so ist, immer für $|z| = 1$,

$$\left| \frac{z - z_k^*}{z - z_k} \right| = \left| \frac{1 - z_k^*}{1 - z_k} \right| = \left| \frac{1 - \frac{1}{\bar{z}_k}}{1 - z_k} \right| = \frac{1}{|z_k|} \left| \frac{\bar{z}_k - 1}{z_k - 1} \right| = \frac{1}{|\bar{z}_k|} = \frac{1}{|z_k|}, \text{ d. h.}$$

$$|z - z_k^*| = \frac{1}{|z_k|} \cdot |z - z_k|. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Also ist

$$\prod_{k=1}^{n} |z - z_k^*| = \frac{1}{|z_1||z_2|\cdots|z_n|} \cdot \prod_{k=1}^{n} |z - z_k|,$$

und, wegen (13.),

$$|g(z)| = \frac{|c_n|}{|z_1|\cdots|z_n|} \cdot \Big(\prod_{k=1}^{n} |z - z_k|\Big)^2, \qquad (|z| = 1).$$

Endlich liefert Gleichung (9′.)

$$\tau(t) = \tfrac{1}{2} \frac{|c_n|}{|z_1|\cdots|z_n|} \Big(\prod_{k=1}^{n} |z - z_k|\Big)^2_{z=e^{it}}. \tag{14.}$$

Ich habe also für das beliebige nichtnegative trigonometrische Polynom n-ter Ordnung $\tau(t)$ die Darstellung

$$\tau(t) = |\gamma(z)|^2_{z=e^{it}} \tag{15.}$$

gewonnen, wo $\gamma(z)$ das Polynom von genau n-tem Grade

$$\gamma(z) = \sqrt{\frac{|c_n|}{2|z_1|\cdots|z_n|}} \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \tag{16.}$$

(die Quadratwurzel ist positiv genommen) bedeutet, w. z. b. w.*)

3. Es sei $\tau(t)$ ein reines Kosinuspolynom. In diesem Falle sind die Koeffizienten von $g(z)$ (s. Gleichung (8.)) alle reell. Die $2n$ Wurzeln der sodann reziproken Gleichung $g(z) = 0$ sind also teilweise reell, teilweise zu Paaren konjugiert komplex (wobei natürlich eine der beiden Sorten von Wurzeln auch ganz fehlen kann). Bestimme ich also die Wurzelgruppe $z_1, z_2, \ldots z_n$ nach der bestimmten Instruktion der Nr. 2, so sind auch diese teilweise reell, teilweise zu Paaren konjugiert komplex. Also hat das entsprechende, durch Gleichung (16.) definierte Polynom $\gamma(z)$ lauter reelle Koeffizienten. Für ein reines Kosinuspolynom n-ter Ordnung $\tau(t)$ existiert also mindestens eine Darstellung $\tau(t) = |\gamma(z)|^2_{z=e^{it}}$, wo das Polynom $\gamma(z)$ lauter reelle Koeffizienten besitzt.

Beispiel:

$$\tau(t) = (n+1)\tfrac{1}{2} + n\cos t + (n-1)\cos 2t + \cdots + \cos nt \tag{17.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geqq 0.$$

*) Es sei

$$\{\gamma(z)\}_{z=e^{it}} = u(t) + iv(t).$$

Dann ist

$$\tau(t) = [u(t)]^2 + [v(t)]^2.$$

Das gewonnene Resultat läßt sich also auch so aussprechen: Ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung läßt sich als Summe der Quadrate zweier konjugierter trigonometrischer Polynome von höchstens n-ter Ordnung darstellen.

Hier ist

$$g(z) \equiv 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + (n+1)z^n + \cdots + 3z^{2n-2} + 2z^{2n-1} + z^{2n}$$
$$= (1 + z + \cdots + z^n)^2.$$

Die Wurzeln von $g(z) = 0$ sind also in diesem Falle

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}, \ \ldots \ z_n = e^{in\frac{2\pi}{n+1}},$$

jede mit der Multiplizität 2. Also bilden diese Einheitswurzeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ eine Wurzelgruppe der Gleichung $g(z) = 0$. Da weiter

$$|z_1| = \cdots = |z_n| = 1, \ |c_n| = 1,$$

so liefert Gleichung (16.)

$$\gamma(z) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ (1 + z + \cdots + z^n),$$

und Gleichung (15.) die Darstellung:

(18.) $$(n+1)\tfrac{1}{2} + n\cos t + \cdots + \cos nt = \tfrac{1}{2}\left|1 + z + \cdots + z^n\right|^2_{z=e^{it}}.$$

Diese Gleichung (18.) rührt von Herrn *Toeplitz* her*).

4. Die Formeln (15.), (16.) geben zu jeder n-gliedrigen Wurzelgruppe

$$z_1, \ z_2, \ \ldots \ z_n$$

der Gleichung $2n$-ten Grades

$$g(z) = 0$$

eine ganz bestimmte Darstellung des nichtnegativen trigonometrischen Polynoms $\tau(t)$, von der Form:

(15.) $$\tau(t) = \left|\gamma(z)\right|^2_{z=e^{it}}.$$

Zu verschiedenen Wurzelgruppen gehören verschiedene Darstellungen (15.).

Wie viele verschiedene Wurzelgruppen hat die Gleichung $g(z) = 0$?

Es sei ν die Anzahl der voneinander verschiedenen Wurzeln von $g(z) = 0$, deren absoluter Betrag < 1 ist. (Es kann auch $\nu = 0$ sein.) Die Multiplizitätszahlen dieser Wurzeln seien $k_1, k_2, \ldots k_\nu$. (Auf die Anzahl und Multiplizität der Wurzeln vom absoluten Betrage $= 1$ kommt

---

*) S. a. a. O., § 4. Auf Grund dieser *Toeplitz*schen Formel lautet der Ausdruck des arithmetischen Mittels der ersten $(n+1)$ Partialsummen der *Fourier*reihe einer integrierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle x

(19.) $$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\left|1 + z + \cdots + z^n\right|^2}{n+1}\,dt, \quad z = e^{i(x-t)},$$

an der Stelle $x = 0$:

(20.) $$S_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\frac{\left|1 + z + \cdots + z^n\right|^2_{z=e^{it}}}{n+1}\,dt.$$

es bei dieser Frage gar nicht an.) Dann hat, wie leicht zu beweisen, die Gleichung $g(z) = 0$ genau

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_\nu + 1) = \varrho$$

voneinander verschiedene Wurzelgruppen. Man erhält also durch die Formeln (15.), (16.) insgesamt ϱ voneinander verschiedene und ganz bestimmte Darstellungen*)

$$\tau(t) = |\gamma_k(z)|^2_{z=e^{it}}. \qquad (k=1,2,\dots\varrho)$$

Beispiele: a) sind die $2n$ Wurzeln von $g(z) = 0$ alle voneinander verschieden, dann ist $\nu = n$, $k_1 = \cdots = k_n = 1$. Man hat also in diesem Falle $\varrho = 2^n$ voneinander verschiedene Darstellungen für $\tau(t)$. b) sind die Wurzeln von $g(z) = 0$ dem absoluten Betrage nach alle gleich 1, dann ist $\nu = 0$, $k_1 = \cdots = k_\nu = 0$, also $\varrho = 1$; man bekommt also eine einzige Darstellung.

5. Es sei ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom $\tau(t)$ von n-ter Ordnung gegeben; dann liefert das in Nr. 2 gegebene Verfahren genau ϱ voneinander verschiedene und ganz bestimmte rationale ganze Funktionen der komplexen Variabeln z

$$(16'.) \qquad \gamma_1(z),\ \gamma_2(z),\ \dots\ \gamma_\varrho(z), \qquad (\varrho = (k_1 + 1) \cdots (k_\nu + 1)),$$

für welche

$$|\gamma_k(z)|^2_{z=e^{it}} = \tau(t).$$

Es fragt sich, ob es nicht noch andere $\gamma(z)$ gibt, für welche

$$|\gamma(z)|^2_{z=e^{it}} = \tau(t).$$

Die Antwort lautet, daß es im wesentlichen keine weiteren $\gamma(z)$ mehr gibt. Genauer: ist für ein $\gamma(z)$

$$|\gamma(z)|^2_{z=e^{it}} = \tau(t),$$

so ist

$$\gamma(z) \equiv w\gamma_k(z),$$

---

*) Ist $\tau(t)$ ein reines Kosinuspolynom, so sind die Koeffizienten von $g(z)$ alle reell. Wie viele gibt es nun unter den $\gamma_k(z)$ $(k = 1, 2, \dots \varrho)$, deren Koeffizienten alle reell sind? D. h. kurz, wie viele „reelle Darstellungen" sind in diesem Falle vorhanden? Es sei μ die Anzahl derjenigen Wurzeln von $g(z) = 0$, die innerhalb des Einheitskreises entweder auf der reellen Axe, oder auf der oberen Halbebene liegen. Es seien $k_1, k_2, \dots k_\mu$ die Multiplizitäten dieser Wurzeln. Dann ist

$$\varrho' = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_\mu + 1)$$

die Anzahl der „reellen Darstellungen" für $\tau(t)$, welche durch die Formeln (15.), (16.) geliefert werden.

wo w eine Konstante bedeutet, für welche $|w| = 1$ ist, und $\gamma_k(z)$ eines der Polynome unter (16′.) bedeutet*).

Den Beweis dafür will ich hier nicht auseinandersetzen. Er läßt sich mit Hilfe des folgenden Theorems leicht führen. Es sei $\frac{G(z)}{H(z)}$ eine gebrochene rationale Funktion, deren Zähler und Nenner von gleichem Grade n sind und keinen gemeinsamen Linearfaktor haben. Es sei weiter

$$\left|\frac{G(z)}{H(z)}\right| = 1 \qquad \text{für} \qquad |z| = 1.$$

Sind dann

$$z_1, z_2, \dots z_n$$

die Wurzeln von

$$G(z) = 0,$$

dann sind die Wurzeln von

$$H(z) = 0$$

die Spiegelpunkte:

$$z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1}, \quad z_2^* = \frac{1}{\bar{z}_2}, \quad \dots \quad z_n^* = \frac{1}{\bar{z}_n}.$$

§ 2.

Parametrale Darstellung der Koeffizienten eines beliebigen nichtnegativen trigonometrischen Polynoms n-ter Ordnung.

6. Im § 1 wurde bewiesen, daß

(21.) $$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_n z^n|^2_{z=e^{it}}$$

die Gesamtheit aller nichtnegativer trigonometrischer Polynome von höchstens n-ter Ordnung erschöpft, wenn $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_n$ alle möglichen Systeme von $n+1$ komplexen Größen durchlaufen.

Diese Tatsache verleiht den Formeln (3.) oder (4.) oder (5.) eine besondere Bedeutung. Ich kann, indem ich in (4.) statt α_s, β_s die Zeichen x_s, y_s $(s = 0, 1, \dots n)$ setze, sagen:

Man erhält die Gesamtheit aller nichtnegativer trigonometrischer Polynome von höchstens n-ter Ordnung

(22.) $$\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt$$

durch

$$|x_0 + iy_0 + (x_1 + iy_1) z + \dots + (x_n + iy_n) z^n|^2_{z=e^{it}};$$

*) Bei den „reellen Darstellungen“ im Falle eines reinen Kosinuspolynoms ist $w = \pm 1$.

d. h. wenn man

$$(23.)\quad \begin{cases} \lambda_0 = \sum_{s=0}^{n} (x_s^2 + y_s^2), \\ \lambda_r = 2\sum_{s=0}^{n-r} (x_{r+s}x_s + y_{r+s}y_s), \quad \mu_r = 2\sum_{s=0}^{n-r} (x_{r+s}y_s - y_{r+s}x_s), \end{cases}$$

setzt und hier

$$x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$$

alle möglichen Systeme von $2n+2$ *reellen Größen durchlaufen läßt.*

Es ist dies eine parametrale Darstellung der Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung.

[Geometrisch ausgedrückt: der totale $(2n+2)$-dimensionale Raum wird durch die Formeln (22.), (23.) auf die Totalität der nichtnegativen trigonometrischen Polynome von höchstens n-ter Ordnung abgebildet. Jedem Punkte dieses Raumes mit den Koordinaten

$$(24.)\qquad x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$$

entspricht *ein einziges* nichtnegatives trigonometrisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung (22.), dessen Koeffizienten durch die Formeln (23.) gegeben sind. Umgekehrt, gehört zu jedem nichtnegativen trigonometrischen Polynom (22.) von höchstens n-ter Ordnung *mindestens ein* Punkt (24.) des $(2n+2)$-dimensionalen Raumes. *Wie* sich ein solcher Punkt und überhaupt die Gesamtheit aller entsprechender Punkte mit Hilfe der Gleichung

$$\lambda_n + i\mu_n + (\lambda_{n-1} + i\mu_{n-1})z + \cdots + (\lambda_{n-1} - i\mu_{n-1})z^{2n-1} + (\lambda_n - i\mu_n)z^{2n} = 0$$

bestimmen läßt, habe ich im § 1 dargetan*)].

---

*) Die Methode (s. Nr. 2) ordnet zunächst zu

$$\lambda_0, \lambda_1, \mu_1, \ldots \lambda_n, \mu_n$$

eine endliche Anzahl von Punkten

$$(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n)$$

des $(2n+2)$-dimensionalen Raumes zu. Aus jedem dieser Punkte wird dann eine geschlossene Kurve

$$\xi_r + i\eta_r = (x_r + iy_r)e^{i\sigma},\ r = 0, 1, 2, \ldots n,\ 0 \leqq \sigma < 2\pi,$$

abgeleitet (s. Nr. 5), deren Punkte alle dem gegebenen Polynome entsprechen, und diese entsprechenden Punkte dann auch erschöpfen. Diese sphärischen Kurven endlicher Anzahl, die auf der Kugel

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + \eta_0^2 + \eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2 = \lambda_0$$

des $(2n+2)$-dimensionalen Raumes liegen, sind es also, die dem trigonometrischen Polynome im $(2n+2)$-dimensionalen Raume entsprechen.

7. Für die reinen Kosinuspolynome gilt:

Jedem Punkte des unendlichen $(n+1)$*-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten*

(25.) $$x_0, x_1, \dots x_n$$

entspricht ein nichtnegatives Kosinuspolynom von höchstens n-ter Ordnung

(26.) $$\lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_n \cos nt,$$

dessen Koeffizienten durch die Formeln

(27.)
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_r &= 2(x_0 x_r + x_1 x_{r+1} + \cdots + x_{n-r} x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n &= 2 x_0 x_n \end{aligned}$$

gegeben sind. Es wird durch diese Formeln die Gesamtheit der besagten Polynome erschöpft, d. h. es entspricht jedem nichtnegativen Kosinuspolynom von höchstens n-ter Ordnung (26.) mindestens ein Punkt (25.) des $(n+1)$-dimensionalen Raumes. Jedem Polynome (26.) entsprechen eine *endliche* Anzahl von Punkten (25.) im $(n+1)$-dimensionalen Raume. Die Bestimmung dieser Punkte hängt von der Diskussion der reziproken Gleichung

(28.) $$\lambda_n + \lambda_{n-1} z + \cdots + 2\lambda_0 z^n + \cdots + \lambda_{n-1} z^{2n-1} + \lambda_n z^{2n} = 0$$

ab*).

§ 3.

Über das Maximum und Minimum eines beliebigen trigonometrischen Polynoms n-ter Ordnung und eines beliebigen harmonischen Polynoms n-ter Ordnung für einen Kreis der Ebene.

8. Ich will im folgenden zeigen, wie auf Grund der im § 2 gegebenen Parameterdarstellung nichtnegativer trigonometrischer Polynome die exakte und methodische Lösung gewisser Probleme möglich ist, die sich auf trigonometrische Polynome beziehen.

Betrachten wir die Gesamtheit aller nichtnegativen trigonometrischen Polynome, deren Ordnung $\leqq n$, und deren erster Koeffizient gleich 1 ist:

---

*) Die endliche Anzahl von Punkten, welche im $(n+1)$-dimensionalen Raume einem Polynome (26.) entsprechen, liegen offenbar alle auf der Kugel

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = \lambda_0$$

des $(\xi_0, \xi_1, \dots \xi_n)$-Raumes.

(29.) $S(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt.$

Welchen Wert hat das Maximum von $S(0)$ für diese Gesamtheit, und für welches Polynom $S^*(t)$ wird dieses Maximum erreicht?

Es ist nach Nr. 6

(30.) $$S(t) = \left| \sum_{s=0}^{n} (x_s + i y_s) z^s \right|^2_{z=e^{it}},$$

wo, nach der ersten Gleichung (23.),

$$\sum_{s=0}^{n} (x_s^2 + y_s^2) = 1.$$

Es soll also das Maximum von

(31.) $$S(0) = (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^2 + (y_0 + y_1 + \cdots + y_n)^2$$

gefunden werden mit der Nebenbedingung

(32.) $$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1.$$

Es ergibt sich sogleich:

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_n, \quad y_0 = y_1 = \cdots = y_n.$$

Also ist

$$x_0 + i y_0 = x_1 + i y_1 = \cdots = x_n + i y_n,$$

und, in Folge von (32.),

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Gleichung (30.) liefert also

$$S^*(t) = \left| (x_0 + i y_0) \sum_{s=0}^{n} z^s \right|^2_{z=e^{it}} = |x_0 + i y_0|^2 \left| \sum_{s=0}^{n} z^s \right|^2_{z=e^{it}} = \frac{1}{n+1} |1 + z + \cdots + z^n|^2_{z=e^{it}},$$

endlich

(33.) $$S^*(t) = \frac{(n+1) + 2n \cos t + 2(n-1) \cos 2t + \cdots + 2 \cos nt}{n+1},$$

und also

(34.) $$S^*(0) = \frac{n+1+2n+\cdots+2}{n+1} = n+1.$$

Ich habe also erhalten:

Für jedes beständig nichtnegative trigonometrische Polynom von höchstens n-ter Ordnung und mit dem absoluten Gliede 1:

(35.) $S(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt$

*ist**)

*) Daß $S(0) < 2n + 1$ ist, ist trivial; das Gewicht dieses Theorems fällt auf die Bestimmung des wirklichen Maximums $(n + 1)$ von $S(0)$ und desjenigen, einzigen, trigonometrischen Polynoms, welches das Maximum erreicht. — S. meine in der Einleitung zitierten C. R.-Noten.

(36.) $$S(0) \leqq n+1.$$

Es gibt nur ein einziges trigonometrisches Polynom $S(t)$, für welches in (36.) *das Gleichheitszeichen gültig ist; es ist dies das reine Kosinuspolynom n-ter Ordnung*

(33.) $$S^*(t) = \frac{(n+1) + 2n\cos t + \cdots + 2\cos nt}{n+1}.$$

Dieses trigonometrische Polynom spielt bekanntlich in der Theorie der Summabilität der Fourierschen und Laplaceschen Reihe eine wichtige Rolle; wir sehen jetzt, daß dieses spezielle trigonometrische Polynom (33.) *in der Menge der Polynome* (35.) *durch eine einfache Maximumseigenschaft ausgezeichnet ist.*

9. Es sei wieder $S(t)$ ein Polynom der Menge (35.). Es bezeichne t_0 irgendeine reelle Zahl. Dann ist

$$\begin{aligned} S(t_0+t) &= 1 + \lambda_1\cos(t_0+t) + \mu_1\sin(t_0+t) + \cdots \\ &= 1 + (\lambda_1\cos t_0 + \mu_1\sin t_0)\cos t + (-\lambda_1\sin t_0 + \mu_1\cos t_0)\sin t + \cdots \end{aligned}$$

wieder ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom in t, das zur Menge (35.) gehört. Also ist nach dem Theoreme von Nr. 8

$$S(t_0) \leqq n+1.$$

Das Gleichheitszeichen ist nur gültig, wenn

$$S(t_0+t) = \frac{(n+1) + 2n\cos t + \cdots + 2\cos nt}{n+1},$$

d. h. wenn

$$S(t) = \frac{(n+1) + 2n\cos(t-t_0) + \cdots + 2\cos n(t-t_0)}{n+1}.$$

Es gilt also folgendes Theorem:

Wenn das trigonometrische Polynom

(35.) $$S(t) = 1 + \lambda_1\cos t + \mu_1\sin t + \cdots + \lambda_n\cos nt + \mu_n\sin nt$$

der Ungleichung

$$0 \leqq S(t), \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

genügt, so ist

(37.) $$S(t) \leqq n+1 \qquad \text{für} \qquad 0 \leqq t \leqq 2\pi.$$

Ist in (37.) *für ein $t = t_0$ das Gleichheitszeichen gültig, d. h. ist*

$$S(t_0) = n+1,$$

so ist notwendigerweise

$$S(t) = \frac{(n+1) + 2n\cos(t-t_0) + \cdots + 2\cos n(t-t_0)}{n+1}.$$

Vollständig gleichbedeutend mit diesem Theoreme ist das folgende:

Ist das harmonische Polynom n-ter Ordnung

$$S(\theta, r) = 1 + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta)\, r + \cdots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n$$

im Einheitskreise $r \leqq 1$ *nichtnegativ, so ist*

$$S(\theta, r) \leqq n + 1$$

auf der ganzen Scheibe des Einheitskreises. Das Zeichen der Gleichheit ist hier nur für das „arithmetische Mittel" mit dem Index n der Reihe

$$1 + 2r\cos(\theta - \theta_0) + \cdots + 2r^n \cos n(\theta - \theta_0) + \cdots$$

gültig, d. h. für das harmonische Polynom

$$\frac{(n+1) + 2nr\cos(\theta - \theta_0) + \cdots + 2r^n \cos n(\theta - \theta_0)}{n+1}.$$

10. Ich will nun den wesentlichen Inhalt des Theorems von Nr. 9 auf ein beliebiges trigonometrisches Polynom übertragen, von dessen Vorzeichen ich also nichts voraussetze.

Es sei

(38.) $$T(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

ein ganz beliebiges trigonometrisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung, dessen absolutes Glied gleich Null ist. Es sei M das absolute Maximum, und $-m$ das absolute Minimum dieses Polynoms. M und m sind positive Zahlen und geben resp. die höchste „Steigung" und die tiefste „Senkung" von $T(t)$ an.

Nach Voraussetzung ist

(39.) $$T(t) + m = m + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom. Also ist auch

(40.) $$\frac{T(t)+m}{m} = 1 + \frac{a_1}{m}\cos t + \frac{b_1}{m}\sin t + \cdots$$

ein solches Polynom; daher ist, nach Nr. 9,

$$\frac{M+m}{m} \leqq n+1,$$

d. h.

(41.) $$M \leqq n \cdot m,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gültig sein kann, wenn

$$\frac{T^*(t)+m}{m} = \frac{(n+1) + 2n\cos(t-t_0) + \cdots + 2\cos n(t-t_0)}{n+1},$$

d. h.

(42.) $$T^*(t) = m\,\frac{2n\cos(t-t_0) + \cdots + 2\cos n(t-t_0)}{n+1}.$$

Hier bezeichnet t_0 eine Konstante.

Für $-T(t)$ ist m die maximale Steigung und M die maximale Senkung. Also ist auch

$$m \leqq n \cdot M.$$

Ich habe also das folgende Theorem erhalten:

Bezeichnen M und $-m$ das absolute Maximum und das absolute Minimum eines beliebigen trigonometrischen Polynoms von höchstens n-ter Ordnung mit dem absoluten Gliede gleich Null:

$$(43.) \quad T(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

*so ist**)

$$(44.) \quad M \leqq n \cdot m,$$

und

$$(45.) \quad m \leqq n \cdot M.$$

Das Gleichheitszeichen ist in einer dieser beiden Ungleichungen dann und nur dann gültig, wenn

$$T^*(t) = \alpha[n \cos(t-\beta) + (n-1)\cos 2(t-\beta) + \cdots + \cos n(t-\beta)],$$

*wo α, β beliebige reelle Konstanten bedeuten***).

---

*) S. auch meine, in der Einleitung zitierte, C. R.-Note: „Sur les polynomes trigonométriques". — Um z. B. Ungleichung (44.) etwas zu kommentieren: Es ist bekannt, daß

$$a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

so hoch steigt, als es sinkt; (44.) besagt, daß die Steigung von

$$a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$$

höchstens zweimal so groß ist als seine Senkung etc., daß die Steigung von

$$a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

höchstens n-mal so groß ist als seine Senkung; weiter sind es, der Reihe nach, ganz bestimmte trigonometrische Polynome, für welche diese extreme Steigung eintritt; sie ergeben sich unmittelbar aus den arithmetischen Mitteln der Partialsummen der Reihe

$$(46.) \quad 0 + 2\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 2\cos nt + \cdots.$$

**) Man hat es oft mit einem Kosinuspolynome

$$p_1 \cos t + p_2 \cos 2t + \cdots + p_n \cos nt$$

zu tun, dessen sämtliche Koeffizienten positiv sind. Dann ist

$$M = p_1 + p_2 + \cdots + p_n,$$

und Ungleichung (44.) liefert für die Senkung m:

$$m \geqq \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}.$$

Für

$$\frac{2n}{n+1}\cos t + \frac{2(n-1)}{n+1}\cos 2t + \cdots + \frac{2}{n+1}\cos nt$$

ist in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen gültig.

Wir haben vorausgesetzt, daß $a_0 = 0$. Ganz allgemein gilt das folgende Theorem:

Ist M *das Maximum,* μ *das Minimum des ganz beliebigen trigonometrischen Polynoms von höchstens n-ter Ordnung*

$$(47.) \qquad a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

so ist

$$(48.) \qquad \mathsf{M} - a_0 \leqq n(a_0 - \mu)$$

und

$$(49.) \qquad a_0 - \mu \leqq n(\mathsf{M} - a_0),$$

wobei das Gleichheitszeichen in (48.) *oder* (49.) *nur für die Polynome der 3-fachen Schaar*

$$\gamma + \alpha[n \cos(t-\beta) + (n-1)\cos 2(t-\beta) + \cdots + \cos n(t-\beta)],$$

(α, β, γ *= reelle Konstanten) gültig ist.*

11. Es sei $P(x, y)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n-ter Ordnung, d. h. eine rationale ganze Funktion n-ter Ordnung von x, y mit reellen Koeffizienten, für welches

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Es sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt der (x, y)-Ebene. Dann ist bekanntlich

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + (\alpha_1 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta)\varrho + \cdots + (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)\varrho^n,$$

wo ϱ, θ Polarkoordinaten mit dem Anfangspunkte (x_0, y_0) bedeuten. Schlagen wir um den Punkt (x_0, y_0) einen Kreis mit dem (beliebigen) Radius ϱ. Es sei M das Maximum und μ das Minimum von $P(x, y)$ auf diesem Kreise.

Nach den Ungleichungen (48.), (49.) ist

$$\mathsf{M} - P(x_0, y_0) \leqq n[P(x_0, y_0) - \mu], \quad P(x_0, y_0) - \mu \leqq n[\mathsf{M} - P(x_0, y_0)], \text{ d. h.}$$

$$\mu + \frac{\mathsf{M} - \mu}{n+1} \leqq P(x_0, y_0) \leqq \mathsf{M} - \frac{\mathsf{M} - \mu}{n+1}.$$

Ich habe also das folgende Theorem gefunden:

Es sei $P(x, y)$ *ein beliebiges harmonisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung;* (x_0, y_0) *sei ein beliebiger Punkt der* (x, y)*-Ebene,* K *ein beliebiger Kreis dieser Ebene mit dem Mittelpunkte* (x_0, y_0). *Ist dann* M *das Maximum,* μ *das Minimum von* $P(x, y)$ *auf dem Kreise* K, *so ist*

$$(50.) \qquad \mu + \frac{\mathsf{M} - \mu}{n+1} \leqq P(x_0, y_0) \leqq \mathsf{M} - \frac{\mathsf{M} - \mu}{n+1}.$$

Ist in einer dieser Ungleichungen für $P(x, y)$ das Zeichen der Gleichheit gültig, (für einen Punkt (x_0, y_0) und einen Radius ϱ), *so ist $P(x, y)$ der reelle Teil von*

$$\gamma + \alpha\{n[w(z-c)] + (n-1)[w(z-c)]^2 + \cdots + [w(z-c)]^n\}.$$

Hier sind γ, α beliebige reelle, w, c beliebige komplexe Konstanten. $\left(|w| = \frac{1}{\varrho},\ c = x_0 + iy_0\right)$.

Obige Ungleichung ist eine Verschärfung für den Fall eines harmonischen Polynoms n-ter Ordnung der bekannten Ungleichung

$$\mu \leqq u(x_0, y_0) \leqq M,$$

welche für jede harmonische Funktion $u(x, y)$ gültig ist, die im Kreise K (und an K) regulär ist).*

§ 4.

Die Grenzen, innerhalb deren die Koeffizienten eines beliebigen nichtnegativen trigonometrischen Polynoms *n*-ter Ordnung liegen.

12. Im folgenden will ich die genauen Grenzen bestimmen, innerhalb welcher die Werte der *Koeffizienten* eines nichtnegativen trigonometrischen Polynoms von höchstens n-ter Ordnung liegen.

Ich beschränke mich auf die Behandlung der reinen Kosinuspolynome mit dem absoluten Gliede 1.

Nach (26.) und (27.) wird die Gesamtheit aller nichtnegativen Kosinuspolynome mit dem absoluten Gliede 1 durch

(51.) $$1 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_n \cos nt$$

dargestellt, wo

(52.) $$\lambda_r = 2 \sum_{s=0}^{n-r} x_{r+s} x_s, \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

oder ausführlicher

(52.)
$$\begin{cases} \lambda_1 = 2(x_0 x_1 + x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n), \\ \lambda_2 = 2(x_0 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-2} x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{n-1} = 2(x_0 x_{n-1} + x_1 x_n), \\ \lambda_n = 2 x_0 x_n, \end{cases}$$

und $x_0, x_1, \ldots x_n$ bedeuten beliebige reelle Zahlen, welche der Bedingung

*) S. meine in der Einleitung zitierte C. R.-Note: „Sur les polynomes harmoniques quelconques“.

(53.) $$\sum_{s=0}^{n} x_s^2 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

unterworfen sind.

Aus (53.) und (52.) folgt:

$$2 + \lambda_1 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_0x_1 + 2x_1x_2 + \cdots + 2x_{n-1}x_n$$
$$= x_0^2 + (x_0 + x_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2,$$

und

$$2 - \lambda_1 = x_0^2 + (x_0 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2, \text{ daher}$$

(54.) $$-2 < \lambda_1 < 2.$$

[Das Gleichheitszeichen ist ausgeschlossen, weil dann $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0$ sein müßte, was wegen (53.) nicht möglich ist.]

Weiter ist

$$2 + \lambda_2 = x_0^2 + x_1^2 + (x_0 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + \cdots + (x_{n-2} + x_n)^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 \text{ und}$$
$$2 - \lambda_2 = x_0^2 + x_1^2 + (x_0 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-2} - x_n)^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2.$$

Also ist auch

(55.) $$-2 < \lambda_2 < 2 \quad \text{etc.}$$

$$2 + \lambda_n = (x_0 + x_n)^2 + x_0^2 + 2x_1^2 + \cdots + 2x_{n-1}^2 + x_n^2,$$
$$2 - \lambda_n = (x_0 - x_n)^2 + x_0^2 + 2x_1^2 + \cdots + 2x_{n-1}^2 + x_n^2,$$

also

(56.) $$-2 < \lambda_n < 2.$$

Ich habe also für die Koeffizienten des nichtnegativen Kosinuspolynoms (51.) die Ungleichungen

(57.) $$-2 < \lambda_r < 2, \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

erhalten.

Diese Ungleichungen sind aber nicht charakteristisch für ein nichtnegatives Kosinuspolynom; sie gelten nämlich auch für die Koeffizienten einer nichtnegativen *unendlichen* Kosinus*reihe**); die obigen Zeilen hatten

---

*) Es sei

(58.) $$1 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_\nu \cos \nu t + \cdots$$

die *Fourier*sche Kosinusreihe der nichtnegativen integrierbaren Funktion $f(t)$. Dann ist

$$\lambda_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \nu t \, dt, \text{ also}$$

$$|\lambda_\nu| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = 2 \cdot 1 = 2, \quad \text{d. h.}$$

59.) $$-2 \leqq \lambda_\nu \leqq +2 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty).$$

Das Beispiel

auch nur den Zweck zu zeigen, wie diese Ungleichungen (57.) durch die Parameterdarstellung (52.), (53.) unmittelbar in Evidenz treten und also auf rein algebraischem Wege bewiesen werden können.

13. Nun werde ich aber aus der Parameterdarstellung (52.), (53.) Sätze ableiten, die für das *endliche* nichtnegative Kosinuspolynom charakteristisch sind. Es ist

$$(61.)\quad 1-\lambda_n = x_0^2+\cdots+x_n^2-2x_0x_n = (x_0-x_n)^2+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2,$$

$$(62.)\quad 1+\lambda_n = x_0^2+\cdots+x_n^2+2x_0x_n = (x_0+x_n)^2+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2.$$

Also ist für jedes nichtnegative trigonometrische Kosinuspolynom von höchstens n-ter Ordnung

$$(63.)\quad P(t) = 1+\lambda_1\cos t+\cdots+\lambda_n\cos nt,$$

$$(64.)\quad -1 \leqq \lambda_n \leqq 1.$$

Diejenigen nichtnegativen Kosinuspolynome $P^*(t)$, für welche in (64.) eines der Gleichheitszeichen gültig ist, lassen sich genau bestimmen.

Ist nämlich $\lambda_n = 1$, so ist, wegen (61.),

$$x_0 = x_n,\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0,$$

also

$$P^*(t) = \left|\sum_{s=0}^{n} x_s z^s\right|^2_{z=e^{it}} = |x_0+x_0z^n|^2_{z=e^{it}} = |x_0|^2|1+z^n|^2_{z=e^{it}}.$$

Nach (53.) ist aber

$$2|x_0|^2 = 1,$$

also

$$(65.)\quad P^*(t) = \tfrac{1}{2}|1+z^n|^2_{z=e^{it}},\ \text{oder}$$

$$(66.)\quad P^*(t) = 1+\cos nt.$$

Also ist $1+\cos nt$ das einzige nichtnegative $P(t)$, für welches $\lambda_n = 1$.

Ähnlich folgt aus $\lambda_n = -1$

$$(66'.)\quad P^*(t) = \tfrac{1}{2}|1-z^n|^2_{z=e^{it}} = 1-\cos nt.$$

Ich fahre fort, will aber die Fälle eines geraden oder ungeraden n gesondert betrachten. Es sei

$$(67.)\quad n = 2\nu+1.$$

Es ist

(60.) $$\frac{1-a^2}{1-2a\cos t+a^2} = 1+2a\cos t+\cdots+2a^\nu\cos\nu t+\cdots,\ (0<a<1),$$

zeigt, daß die Koeffizienten den Grenzen -2, $+2$ beliebig nahe kommen können.

$$(68.)\quad \begin{cases} 1 \mp \lambda_n = (x_0 \mp x_n)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2, \\ 1 \mp \lambda_{n-1} = (x_0 \mp x_{n-1})^2 + (x_1 \mp x_n)^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-2}^2, \\ 1 \mp \lambda_{n-2} = (x_0 \mp x_{n-2})^2 + (x_1 \mp x_{n-1})^2 + (x_2 \mp x_n)^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-3}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 \mp \lambda_{\nu+1} = (x_0 \mp x_{\nu+1})^2 + (x_1 \mp x_{\nu+2})^2 + \cdots + (x_\nu \mp x_n)^2. \end{cases}$$

Also ist

$$(69.)\quad -1 \leqq \lambda_{\nu+1} \leqq 1, \quad -1 \leqq \lambda_{\nu+2} \leqq 1, \ldots -1 \leqq \lambda_n \leqq 1.$$

Wenn $n = 2\nu$, so bestehen wieder die Gleichungen (68.), nur daß an Stelle der letzten die Gleichung

$$(70.)\quad 1 \mp \lambda_{\nu+1} = (x_0 \mp x_{\nu+1})^2 + (x_1 \mp x_{\nu+2})^2 + \cdots + (x_{\nu-1} \mp x_n)^2 + x_\nu^2$$

zu setzen ist. Die Ungleichungen (69.) sind also auch in diesem Falle gültig. Da in beiden Fällen

$$\nu = \left[\frac{n}{2}\right] = \text{größte ganze Zahl in } \frac{n}{2},$$

so kann ich das folgende Theorem aussprechen:

Ist das Kosinuspolynom von höchstens n-ter Ordnung

$$(71.)\qquad P(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_n \cos nt$$

beständig nichtnegativ, so ist

$$(72.)\qquad -1 \leqq \lambda_s \leqq 1$$

für

$$(73.)\qquad s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \ \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots n.$$

Hier bedeutet $\left[\frac{n}{2}\right]$ *die größte in* $\frac{n}{2}$ *enthaltene ganze Zahl. Diejenigen* $P^*(t)$, *für welche in einer der Ungleichungen* (72.) *das Zeichen der Gleichheit gültig ist, lassen sich genau bestimmen.*

Den Fall $\lambda_n = -1, +1$ haben wir schon erledigt. [S. Gleichung (66.), (66′.).] Es sei nun $\lambda_{n-1} = 1$. Dann liefert die zweite Gleichung (68.)

$$x_0 = x_{n-1}, \quad x_1 = x_n, \quad x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-2} = 0,$$

und es ist also

$$P^*(t) = \left| \sum_{s=0}^{n} x_s z^n \right|^2_{z=e^{it}} = \left| x_0 + x_1 z + x_0 z^{n-1} + x_1 z^n \right|^2_{z=e^{it}}$$
$$= \left| x_0 + x_1 z \right|_{z=e^{it}} \cdot \left| 1 + z^{n-1} \right|^2_{z=e^{it}}.$$

Also ist, wenn $\lambda_{n-1} = 1$,

$$(74.)\qquad P^*(t) = \left\{ \left| x_0 + x_1 z \right|^2 \left| 1 + z^{n-1} \right|^2 \right\}_{z=e^{it}}, \quad \text{wo}$$
$$x_0^2 + x_1^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Wenn $\lambda_{n-1} = -1$, so ist

(75.) $$P^*(t) = \left| |x_0 + x_1 z|^2 \, |1 - z^{n-1}|^2 \right|_{z=e^{it}}, \quad \text{wo}$$
$$x_0^2 + x_1^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Ähnlich kann man die Fälle $\lambda_{n-2} = \pm 1, \ldots \lambda_{[\frac{n}{2}]+1} = \pm 1$ erledigen. Ich erwähne das Resultat für den letzten Fall $\lambda_{[\frac{n}{2}]+1} = \pm 1$. Es sei

$\alpha)$ $n = 2\nu + 1$; dann folgt aus $\lambda_{\nu+1} = \pm 1$

(76.) $$P^*(t) = \left| |x_0 + x_1 z + \cdots + x_\nu z^\nu|^2 \, |1 \pm z^{\nu+1}|^2 \right|_{z=e^{it}}, \quad \text{wo}$$
$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_\nu^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Es sei $\beta)$ $n = 2\nu$; dann folgt aus $\lambda_{\nu+1} = \pm 1$

(77.) $$P^*(t) = \left| |x_0 + x_1 z + \cdots + x_{\nu-1} z^{\nu-1}|^2 \, |1 \pm z^{\nu+1}|^2 \right|_{z=e^{it}}, \quad \text{wo}$$
$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{\nu-1}^2 = \tfrac{1}{2}.$$

[Der Inhalt von (76.) läßt sich auch so aussprechen: man erhält das allgemeinste nichtnegative Kosinuspolynom

$$1 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_\nu \cos \nu t + \lambda_{\nu+1} \cos (\nu+1)t + \cdots + \lambda_{2\nu+1} \cos (2\nu+1)t,$$

für welches $\lambda_{\nu+1} = \pm 1$ ist, indem man ein beliebiges nichtnegatives Kosinuspolynom

$$1 + \mu_1 \cos t + \cdots + \mu_\nu \cos \nu t$$

mit

$$1 \pm \cos (\nu+1)t$$

multipliziert, etc.].

14. Ich will nur noch aus dem Theoreme der Nr. 13 einen Satz in Bezug auf das *beliebige* Kosinuspolynom (mit dem absoluten Gliede Null)

(78.) $$\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \cos 2t + \cdots + \lambda_n \cos nt$$

ableiten.

Es sei

(79.) $$\varphi(t) = \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \cos 2t + \cdots + \lambda_p \cos pt + \cdots$$

eine beliebige unendliche Kosinusreihe (die etwa für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ gleichmäßig konvergiert). Dann gilt bekanntlich folgender Satz: die Funktion $\varphi(t)$ nimmt für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ mindestens einmal einen Wert an, der $\geqq \frac{|\lambda_p|}{2}$ ist, und mindestens einmal einen Wert, der $\leqq -\frac{|\lambda_p|}{2}$ ist. Hier bedeutet λ_p irgendeinen der Koeffizienten der Reihe (79.).

[Beweis:

$$\pm \lambda_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cdot (\pm \cos pt)\, dt, \quad 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt, \quad \text{also}$$

$$\pm \lambda_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,(1 \pm \cos pt)\,dt,$$

woraus

$$\pm \lambda_p \leqq M \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (1 \pm \cos pt)\,dt = 2M, \quad M \geqq \frac{|\lambda_p|}{2}.$$

Hier bedeutet M das (positive) absolute Maximum von $\varphi(t)$ für $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Diese Ungleichung auf

$$-\varphi(t) = \cdots - \lambda_p \cos pt - \cdots$$

angewendet gibt

$$m \geqq \frac{|\lambda_p|}{2},$$

wo $-m$ das (negative) absolute Minimum von $\varphi(t)$ für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ bedeutet. Zusammenfassend:

(80.) $$M, m \geqq \frac{|\lambda_p|}{2},$$ w. z. b. w.

Beispiel:

$$-1 + \frac{1-a^2}{1-2a\cos t + a^2} = 2a\cos t + \cdots + 2a^p \cos pt + \cdots, \quad (0 < a < 1).$$

Hier ist

$$\frac{|\lambda_p|}{2} = a^p, \quad m = \frac{2a}{1+a};$$

es ist nun in der Tat

$$\frac{2a}{1+a} > a^p.$$

Rückt aber a genügend nahe an 1, so kommt in diesem Falle m *beliebig* nahe an $\frac{|\lambda_p|}{2}$. Wir sehen aus diesem Beispiele, daß, kurz ausgedrückt, die Ungleichung $M, m \geqq \frac{|\lambda_p|}{2}$ sich für die Gesamtheit der *unendlichen* Kosinusreihen (79.) nicht verbessern läßt.]

Das Theorem von Nr. 13 liefert nun für das beliebige (endliche) Kosinuspolynom

(81.) $$S(t) = \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \cos 2t + \cdots + \lambda_n \cos nt$$

ein besseres Resultat.

Es sei $-m$ das absolute Minimum von (81). Dann ist

$$S(t) + m = m + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_n \cos nt$$

nichtnegativ, und

$$\frac{S(t)+m}{m} = 1 + \frac{\lambda_1}{m}\cos t + \cdots + \frac{\lambda_n}{m}\cos nt$$

ist auch nichtnegativ. Also ist

$$\frac{|\lambda_s|}{m} \leqq 1,$$

für

$$s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots n; \quad \text{etc.}$$

Ich habe also den Satz erhalten:

Sind M und $-m$ das absolute Maximum und Minimum des beliebigen Kosinuspolynoms

$$\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \cos 2t + \cdots + \lambda_n \cos nt,$$

so ist

(80′.) $$M, m \geqq |\lambda_s|,$$

für

$$s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots n.$$

Die Fälle, wo in (80′.) *das Gleichheitszeichen auftritt, lassen sich leicht bestimmen**).

15. Wir haben für das nichtnegative Kosinuspolynom von höchstens n-ter Ordnung

(82.) $$1 + \lambda_1 \cos t + \cdots + \lambda_n \cos nt$$

gefunden, daß

$$-1 \leqq \lambda_s \leqq 1, \qquad \text{für} \qquad s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1,\ \left[\frac{n}{2}\right] + 2, \ldots n.$$

Zwischen welchen Grenzen sind nun die ersten $\left[\frac{n}{2}\right]$ Koeffizienten

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

eingeschlossen?

Schon die Betrachtung des nichtnegativen Kosinuspolynoms

$$\frac{n+1+2n\cos t + \cdots + 2\cos nt}{n+1} = 1 + \frac{2n}{n+1}\cos t + \frac{2(n-1)}{n+1}\cos 2t + \cdots + \frac{2}{n+1}\cos nt$$

---

*) Z. B. *es sei*

$$\psi(t) = \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \cos 2t + \cdots + \lambda_{n-1} \cos (n-1)t + \lambda_n \cos nt \quad (\lambda_n > 0)$$

ein Kosinuspolynom, dessen Maximum für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ gleich λ_n ist, d. h. $M = \lambda_n$; dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, d. h. $\psi(t) = \lambda_n \cos nt$. Beweis: nach Voraussetzung ist

$$\frac{\lambda_n - \psi(t)}{\lambda_n} = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}\cos t - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\cos 2t - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\cos (n-1)t - \cos nt \geqq 0,\ (0 \leqq t \leqq 2\pi),$$

also, auf Grund von Gleichung (66′.),

$$\frac{\lambda_n - \psi_n(t)}{\lambda_n} = 1 - \cos nt, \quad \psi(t) = \lambda_n \cos nt.$$

zeigt, daß diese Koeffizienten alle größer als 1 sein können. In der Tat ist hier

$$\lambda_1 = \frac{2n}{n+1},\ \lambda_2 = \frac{2(n-1)}{n+1}, \dots \lambda_{[\frac{n}{2}]} = \frac{2\left(n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)}{n+1},$$

und diese Zahlen sind alle größer als 1.

Ich will nur die genauen Grenzen von λ_1 bestimmen. Nach den Formeln (52.), (53.) erhalte ich die genauen Grenzen irgendeines Koeffizienten λ_r $(r = 1, 2, \dots n)$, indem ich das absolute Maximum und Minimum der quadratischen Form der $(n+1)$ reellen Variabeln $x_0, x_1, \dots x_n$

$$\lambda_r = 2\,(x_0 x_r + x_1 x_{r+1} + \cdots + x_{n-r} x_n) \tag{83.}$$

bestimme, wenn die Variabeln der Bedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{84.}$$

unterworfen sind.

Ich beschäftige mich mit dem Falle $r = 1$, habe also das absolute Maximum und Minimum von

$$\lambda_1 = 2(x_0 x_1 + x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n) \tag{85.}$$

mit der Bedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{86.}$$

zu bestimmen.

Das absolute Maximum und Minimum liefert bekanntlich die größte resp. kleinste Wurzel der charakteristischen Gleichung $(n+1)$-ten Grades der quadratischen Form (85.):

$$Q_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{87.}$$

Diese Gleichung wollen wir nun lösen.

Es bezeichne $P_n(\lambda)$ die folgende Determinante n-ter Ordnung

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{vmatrix}. \tag{88.}$$

[Sie ist eine Determinante n-ter Ordnung, für welche

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = \lambda,$$
$$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = \cdots = a_{n-1,n} = a_{n,n-1} = 1$$

und die übrigen Elemente gleich Null sind. Unter $P_0(\lambda)$ verstehe ich die Eins.]

Eine leichte Überlegung liefert nun gleich, daß die erzeugende Funktion der Polynome

(89.) $$P_0(\lambda),\ P_1(\lambda), \ldots P_n(\lambda), \ldots$$

gleich

(90.) $$\frac{1}{1-\lambda x + x^2}$$

ist. D. h.

(91.) $$\frac{1}{1-\lambda x + x^2} = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)\,x + \cdots + P_n(\lambda)\,x^n + \cdots.$$

Setze ich also

(92.) $$\lambda = 2\cos\theta,$$

so erhalte ich

(93.) $$\frac{1}{1-2\cos\theta\cdot x + x^2} = P_0(2\cos\theta) + P_1(2\cos\theta)\,x + \cdots + P_n(2\cos\theta)\,x^n + \cdots.$$

Nun ist aber

(94.) $$\frac{1}{1-2\cos\theta\cdot x + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\,x^n,$$

also

(95.) $$P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Die in Betracht kommenden n Nullstellen von $P_n(2\cos\theta)$ sind also

(96.) $$\frac{\pi}{n+1},\ 2\frac{\pi}{n+1}, \ldots n\frac{\pi}{n+1},$$

und die n Wurzeln der Gleichung

$$P_n(\lambda) = 0$$

sind mit Rücksicht auf (92.),

(97.) $$2\cos\frac{\pi}{n+1},\ 2\cos\frac{2\pi}{n+1}, \ldots 2\cos\frac{n\pi}{n+1}.$$

Endlich, da $Q_{n+1}(\lambda) = P_{n+1}(-\lambda)$ (s. die Gleichungen (87.), (88.)), kann ich sagen:

Die Wurzeln der Gleichung $(n+1)$-ten Grades

$$(98.)\qquad Q_{n+1}(\lambda)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda & & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

sind

$$(99.)\qquad 2\cos\frac{\pi}{n+2},\ 2\cos\frac{2\pi}{n+2},\ \dots\ 2\cos\frac{(n+1)\pi}{n+2}.$$

Die größte Wurzel ist $2\cos\frac{\pi}{n+2}$, die kleinste Wurzel ist

$$2\cos\frac{(n+1)\pi}{n+2}=-2\cos\frac{\pi}{n+2},$$

[Ich habe also erhalten:

Der größte Wert der quadratischen Form

$$(100.)\qquad 2x_0x_1+2x_1x_2+\cdots+2x_{n-1}x_n$$

mit der Nebenbedingung

$$(101.)\qquad x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=1$$

ist

$$2\cos\frac{\pi}{n+2},$$

der kleinste Wert ist*)

$$-2\cos\frac{\pi}{n+2}.]$$

Als Lösung der gestellten Aufgabe kann ich also das folgende Theorem aussprechen:

Ist das trigonometrische Polynom höchstens n-ter Ordnung

$$(102.)\qquad P(t)=1+\lambda_1\cos t+\cdots+\lambda_n\cos nt$$

nichtnegativ, so ist

$$(103.)\qquad -2\cos\frac{\pi}{n+2}\leqq\lambda_1\leqq 2\cos\frac{\pi}{n+2}.$$

In dieser Ungleichung (103.) *kann auch das Gleichheitszeichen gültig sein.* Ist z. B. $\lambda_1=2\cos\frac{\pi}{n+2}$, so ist, wie unschwer zu beweisen,

$$(104.)\ P^*(t)=\varrho^2\left|\sin\frac{\pi}{n+2}+\sin\frac{2\pi}{n+2}\cdot z+\sin\frac{3\pi}{n+2}\cdot z^2+\cdots+\sin\frac{(n+1)\pi}{n+2}\cdot z^n\right|^2_{z=e^{it}},$$

wo

---

*) Man sieht, daß für $\lim n=\infty$ das Maximum gegen $+2$, das Minimum gegen -2 konvergiert.

$$(105.) \qquad \varrho^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n+2} + \cdots + \sin^2 \frac{(n+1)\pi}{n+2}},$$

das einzige nichtnegative Kosinuspolynom von höchstens n-ter Ordnung, das mit

$$1 + 2 \cos \frac{\pi}{n+2} \cdot \cos t + \cdots$$

beginnt.

[Beispiel: $(n = 2)$. Ist $1 + \lambda_1 \cos t + \lambda_2 \cos 2t$ nichtnegativ, so ist $-\sqrt{2} \leqq \lambda_1 \leqq \sqrt{2}$, und

$$1 + \sqrt{2} \cos t + \tfrac{1}{2} \cos 2t$$

ist das einzige nichtnegative Kosinuspolynom von höchstens zweiter Ordnung, für welches $\lambda_1 = \sqrt{2}$.]

Anhang: Über einen Satz von *Tschebyscheff*.

16. Auf Grund der Parameterdarstellung nichtnegativer trigonometrischer Polynome werden sich wohl mehrere Fragen lösen lassen, die sich auf trigonometrische Polynome oder rationale ganze Funktionen beziehen und im Sinne von *Tschebyscheff* gestellt sind. Ich will mich hier nur mit einem der einfachsten *Tschebyscheff*schen Resultate befassen. —

Man betrachte die Gesamtheit der Kosinuspolynome n-ter Ordnung von der Form

$$(106.) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \cdots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)t + \cos nt,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. Man bestimme nun zunächst dasjenige Polynom dieser Gesamtheit (oder besser: diejenigen Polynome), für welche *die Schwankung möglichst klein ist.*

Unter Schwankung des Polynoms (106.) verstehe ich, wie üblich, die Differenz des Maximums und Minimums des Polynoms für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ (oder $0 \leqq t \leqq \pi$).

17. Da die Größe des absoluten Gliedes α_0 für die Schwankung belanglos ist, kann ich die obige Aufgabe durch die folgende ersetzen:

Zu bestimmen ist in der Gesamtheit der Kosinuspolynome

$$(107.) \qquad P(t) = \alpha_1 \cos t + \cdots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)\, t + \cos nt$$

dasjenige Kosinuspolynom, für welches die Schwankung möglichst klein ist.

Es bezeichne M das Maximum und $-m$ das Minimum von $P(t)$. Dann ist, nach Ungleichung (80′.) der Nr. 14,

(108.) $$M, m \geqq 1.$$

Also ist die Schwankung $M + m$ eines Kosinuspolynoms $P(t)$ sicher $\geqq 2$, und die Schwankung 2 wird für ein $P^*(t)$ dann, und nur dann auftreten, wenn für dieses $P^*(t)$

(109.) $$M = m = 1$$

ist.

Aber aus $m = 1$ allein folgt schon (s. Nr. 14, Fußnote), daß

(110.) $$P^*(t) = \cos nt.$$

Für dieses $P^*(t) = \cos nt$ ist dann auch $M = 1$.

Die Aufgabe dieser Nummer ist also gelöst, und ich habe erhalten, daß für $\cos nt$, und nur für $\cos nt$, die Schwankung minimal ist in der Gesamtheit der Kosinuspolynome (107.). Die Größe der Minimalschwankung ist 2.

18. Es ist klar, daß in der Gesamtheit der Kosinuspolynome

(111.) $$\alpha_1 \cos t + \cdots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)t + a \cos nt,$$

wo a eine gegebene (positive), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, $a \cos nt$ dasjenige Kosinuspolynom ist, für welches die Schwankung möglichst klein ausfällt. Die Größe der Minimalschwankung beträgt $2a$.

19. Weiter ist sofort klar, daß in der Gesamtheit der Kosinuspolynome

(112.) $$Q(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \cdots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)t + a \cos nt$$

(a gegeben und positiv; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ beliebige reelle Zahlen) $Q^*(t) = a \cos nt$ dasjenige Polynom ist, für welches das Maximum von $|Q(t)|$ (für $0 \leqq t \leqq 2\pi$) möglichst klein ist. Denn für $Q^*(t)$ muß dann zunächst die Schwankung minimal sein. Dies liefert

(113.) $$Q^*(t) = \text{const.} + a \cos nt.$$

Aus der Forderung folgt dann unmittelbar, daß in dieser Gleichung (113.) die Konstante gleich Null sein muß. Das Minimum von $|Q(t)|_{\text{Max.}}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ ist gleich a.

20. Eine bekannte Aufgabe von *Tschebyscheff* lautet:

In der Gesamtheit der ganzen Funktionen

(114.) $$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

wo $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, soll dasjenige $g^*(x)$ bestimmt werden, für welches das Maximum von $|g(x)|$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ möglichst klein wird.

Setze ich in die Polynome (114.) $x = \cos t$, so erhalte ich die Gesamtheit der Kosinuspolynome von der Form

$$(115.)\quad R(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos t + \cdots + \alpha_{n-1} \cos (n-1)t + \frac{1}{2^{n-1}} \cos nt,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. In dieser Gesamtheit wird, nach Nr. 19, für $R^*(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nt$ das Maximum von $|R(t)|$, für $0 \leqq t \leqq \pi$, möglichst klein sein.

Also ist

$$g^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \,(\arccos x)$$

diejenige (einzige) ganze Funktion n-ten Grades von der Form

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

für welche $|g(x)|_{\text{Max.}}$, $-1 \leqq x \leqq 1$, *möglichst klein ist. Die Größe der Abweichung beträgt in diesem Falle des Minimums* $\frac{1}{2^{n-1}}$.

21. Einen wesentlich verschiedenen Beweis dieses *Tschebyscheff*schen Satzes erhält man, wenn man die $(n+1)$-ten Einheitswurzeln benutzt. Einen solchen einfachen Beweis hat Herr *H. Liebmann* in seiner Arbeit „Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von *Tschebyscheff*“ [Jahresbericht der Deutsch. Math.-Vereinigung, Bd. 18, 1909, S. 433—449] veröffentlicht.

Über ein Problem des Herrn *Carathéodory*.

Von Herrn *Friedrich Riesz* in Kolozsvár.

In der vorangehenden Arbeit des Herrn *Fejér**) wurde der Satz bewiesen, daß jedes nicht-negative trigonometrische Polynom n-ter Ordnung $T(\varphi)$ auf die Form $|f(e^{i\varphi})|^2$ gebracht werden kann, wo $f(z)$ eine entsprechend gewählte ganze rationale Funktion n-ten Grades bedeutet. In den folgenden Zeilen soll dieser Satz auf ein in letzter Zeit viel behandeltes Problem des Herrn *Carathéodory* Anwendung finden. Das Problem lautet:

Es sind die ersten $n+1$ Koeffizienten

$$1, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n$$

der Potenzreihe

$$(1.) \qquad 1 + (a_1 + ib_1)z + \cdots + (a_n + ib_n)z^n + \cdots$$

gegeben; man hat zu entscheiden, ob über die übrigen Koeffizienten derart verfügt werden kann, daß die Reihe im Innern des Einheitskreises konvergiert und der reelle Teil der durch dieselbe dargestellten Funktion im Einheitskreise überall positiv ausfällt.

Die Antwort des Herrn *Carathéodory* lautet**): Es bedeute K_{2n} im $2n$-dimensionalen Raume den kleinsten konvexen Körper, der die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$(2.) \quad y_1 = 2\cos\varphi,\ y_1' = -2\sin\varphi, \ldots, y_n = 2\cos n\varphi,\ y_n' = -2\sin n\varphi$$

enthält. *Damit die Reihe* (1.) *auf die gewünschte Art ergänzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß der Punkt mit den Koordinaten*

---

*) *Über trigonometrische Polynome*, dieses Journal, Bd. 146 (1915), S. 53—82.

**) *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen*, Mathematische Annalen, Bd. LXIV (1907), S. 95—115.

(3.) $$y_1 = a_1,\ y_1' = b_1,\ \ldots,\ y_n = a_n,\ y_n' = b_n$$

innerhalb oder auf der Berandung des Körpers K_{2n} liegt.

Andererseits lieferten meine Untersuchungen über Systeme von Integralgleichungen mit *Stieltjes*schen Integralen die folgende Antwort*): *Damit die Reihe* (1.) *auf die gewünschte Art ergänzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß der Wert des Ausdruckes*

(4.) $$\tfrac{1}{2}(\alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta_n b_n)$$

für jedes beliebige System reeller Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ zwischen Minimal- und Maximalwert des trigonometrischen Polynoms

(5.) $$\alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi + \cdots + \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi$$

liegt.

Endlich führten Herrn *Toeplitz* seine Untersuchungen über gewisse spezielle quadratische und *Hermite*sche Formen von unendlich vielen Veränderlichen dazu, das Problem in folgender, rein algebraischen Form zu beantworten**): Man setze

$$c_0 = 1,\ c_k = \frac{a_k + ib_k}{2},\ c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{a_k - ib_k}{2}. \qquad (k=1,\ldots,n)$$

Damit die Reihe (1.) *auf die gewünschte Art ergänzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die Hermitesche Form*

$$\mathsf{H}(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j-k} x_j \bar{x}_k$$

eine nicht-negative ist.

Die drei angeführten Bedingungen sind einander gleichwertig; denn sie sind ja für ein und dieselbe Tatsache notwendig und hinreichend. Doch es ist nicht ohne Interesse, das Übereinstimmen der drei Bedingungen auch unmittelbar, d. i. ohne auf das ursprüngliche Problem zurückzugehen, zu beweisen.

Für die beiden ersten Bedingungen habe ich einen unmittelbaren Beweis des Übereinstimmens in meiner oben angeführten Arbeit mitgeteilt. Es sei mir gestattet, denselben hier wiederzugeben. Die Tatsache, daß der Wert des Ausdruckes (4.) zwischen die beiden Extremalwerte

---

*) *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales*, Annales de l'École Normale supérieure, t. XXVIII de la 3e série (1911), S. 33—62.

**) *Über die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (1911), S. 191—192.

der Funktion (5.) zu liegen kommt, drückt sich zufolge der Stetigkeit dieser Funktion auch auf folgende Art aus: Die Gleichung in φ

$$\alpha_1(2\cos\varphi - a_1) + \beta_1(2\sin\varphi - b_1) + \cdots + \beta_n(2\sin n\varphi - b_n) = 0$$

besitzt wenigstens eine Wurzel. Andererseits ist

$$\alpha_1(y_1 - a_1) + \beta_1(y_1' - b_1) + \cdots + \beta_n(y_n' - b_n) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen linearen Mannigfaltigkeit von der Dimensionszahl $2n-1$ durch den Punkt (3.). Das ist: Jede solche Mannigfaltigkeit schneidet oder berührt die Kurve (2.) in wenigstens einem Punkte. Nach der Theorie der konvexen Körper bilden aber die Punkte wie (3.), denen in bezug auf eine Kurve die eben angeführte Eigenschaft zukommt, den kleinsten die Kurve enthaltenden konvexen Körper. Damit ist das Übereinstimmen der beiden Bedingungen bewiesen.

Unmittelbare Beweise für das Übereinstimmen der ersten und der dritten Bedingung haben die Herren *Carathéodory**), *E. Fischer***), *J. Schur****) und *Frobenius*†) mitgeteilt.

Ich gehe nun daran, das Übereinstimmen der beiden letzten, d. i. der von mir und Herrn *Toeplitz* angegebenen Bedingungen zu beweisen. Der Beweis beruht auf dem anfangs angeführten Satze des Herrn *Fejér*.

Zunächst ist klar, daß meine Bedingung auch in folgender Weise formuliert werden kann: *Damit die Reihe* (1.) *auf die gewünschte Art ergänzt werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes nicht-negative trigonometrische Polynom*

$$(6.)\quad \alpha_0 + 2\alpha_1\cos\varphi + 2\beta_1\sin\varphi + \cdots + 2\alpha_n\cos n\varphi + 2\beta_n\sin n\varphi$$

der Ausdruck

$$(7.)\qquad \alpha_0 + \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 + \cdots + \alpha_n a_n + \beta_n b_n$$

$\geqq 0$ *ausfällt.* Ist nämlich (6.) nicht-negativ, so ist der Minimalwert von (5.) $\geqq -\frac{\alpha_0}{2}$ und somit, sobald die Bedingung in der ursprünglichen Form

---

*) *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (1911), S. 193—217.

**) *Über das Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend*, ebenda, S. 240—256.

***) *Über einen Satz von C. Carathéodory*, Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1912, S. 4—15.

†) *Ableitung eines Satzes von Carathéodory aus einer Formel von Kronecker*, ebenda, S. 16—31.

erfüllt ist, auch (4.) $\geqq -\frac{a_0}{2}$, d. i. (7.) $\geqq 0$. Umgekehrt sind, wenn man Minimal-, resp. Maximalwert von (5.) durch m und M bezeichnet, die Polynome (5.) $-m$ und $M-$(5.) nicht-negativ und dasselbe gilt daher, sobald die Bedingung in der neuen Form erfüllt ist, auch für die Ausdrücke (4.) $-m$ und $M-$(4.). Also liegt der Wert von (4.) zwischen m und M.

Nun kann man aber nach dem *Fejér*schen Satze jedem nicht-negativen trigonometrischen Polynom n-ter Ordnung (6.) eine ganze rationale Funktion

$$f(z) = x_0 + x_1 z + \cdots + x_n z^n$$

zuordnen, derart, daß das Polynom (6.) $= |f(e^{i\varphi})|^2$ wird. Umgekehrt, wenn $x_0, x_1, \ldots, x_n$ beliebige komplexe Zahlen bedeuten, so wird

$$(8.)\quad |f(e^{i\varphi})|^2 = (x_0 + x_1 e^{i\varphi} + \cdots + x_n e^{in\varphi})(\bar{x}_0 + \bar{x}_1 e^{-i\varphi} + \cdots + \bar{x}_n e^{-in\varphi})$$
$$= \sum_{j,k=0}^{n} e^{i(j-k)\varphi} x_j \bar{x}_k = \sum_{j,k=0}^{n} x_j \bar{x}_k [\cos(j-k)\varphi + i \sin(j-k)\varphi]$$

ein trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung; aus der Definition geht unmittelbar hervor, daß dieses Polynom reell und nicht-negativ ist. Setzt man dieses Polynom gleich dem Polynome (6.), so ergeben sich durch Vergleichung der Koeffizienten gewisse Ausdrücke für die Größen α_k, β_k als Funktionen der x_k; führt man diese Ausdrücke in (7.) ein, so geht die linke Seite von (7.) in eine gewisse *Hermite*sche Form der Veränderlichen x_k über. Um diese Form explicite anzugeben, genügt es zu bedenken, daß der Ausdruck (7.) aus dem Ausdrucke (6.) dadurch entsteht, daß man die Funktionen $\cos k\varphi$ durch $\frac{a_k}{2}$, die Funktionen $\sin k\varphi$ durch $\frac{b_k}{2}$ ersetzt; oder, was auf dasselbe hinausläuft, $\cos k\varphi$ und $\sin k\varphi$ durch Exponentialgrößen ausdrückt und an Stelle von $e^{ik\varphi}$ $(k = 1, \ldots n)$ die Zahlen $c_k = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, an Stelle von $e^{-ik\varphi}$ die konjugierten: $c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ einführt. Die gesuchte *Hermite*sche Form ergibt sich dann unmittelbar aus dem dritten Ausdrucke in Formel (8.), indem man darin die Exponentialgrößen ebenfalls durch die entsprechenden Größen c, d. i. $e^{i(j-k)\varphi}$ durch c_{j-k} ersetzt. Dem Ausdrucke (7.) entspricht daher die *Hermite*sche Form

$$(9.)\qquad \mathsf{H}(x_0, \ldots x_n) = \sum_{j,k=0}^{n} c_{j-k} x_j \bar{x}_k,$$

wo $c_0 = 1$ ist, und die übrigen c oben definiert wurden.

Durch die hiermit erwiesene Identität der Ausdrücke (7.) und (9.) leuchtet das Übereinstimmen meiner Bedingung mit der *Toeplitz*schen unmittelbar ein. Es ist ferner offenbar und daher fast überflüssig zu bemerken, daß durch Verschmelzung der hier gegebenen Beweise für das Übereinstimmen meiner Bedingung einerseits mit der *Carathéodory*schen, andererseits mit der *Toeplitz*schen, ein neuer algebraisch-geometrischer Beweis des Übereinstimmens dieser beiden letzten Bedingungen entsteht. Daß die einzelnen Schritte des hiermit angedeuteten Überganges vom konvexen Körper zur *Hermite*schen Form sich äußerst einfach und elementar führen lassen, wird nach dem obigen klar, wenn man noch bemerkt, daß der verwendete *Fejér*sche Satz fast unmittelbar aus dem Fundamentalsatze der Algebra folgt.

Über einen Satz des Herrn *Serge Bernstein.*

Von Herrn *Michael Fekete* in Budapest.

1. In seiner Preisschrift*) „Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné“ hat Herr *Serge Bernstein* den folgenden Satz bewiesen: *Es sei*

$$(1.)\quad \varphi(\vartheta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\vartheta + \mu_1 \sin\vartheta + \lambda_2 \cos 2\vartheta + \mu_2 \sin 2\vartheta + \cdots + \lambda_p \cos p\vartheta + \mu_p \sin p\vartheta$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom mit reellen Koeffizienten und von höchstens p-ter Ordnung. Wenn dann

$$(2.)\qquad |\varphi(\vartheta)| \leqq M \qquad \textit{für} \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi,$$

so ist

$$(3.)\qquad \left|\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right| = |\varphi'(\vartheta)| \leqq 2pM \qquad \textit{für} \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi.$$

Für *reine Sinuspolynome* (und auch für reine Kosinuspolynome) $\varphi(\vartheta)$ von höchstens p-ter Ordnung, die der Ungleichung (2.) genügen, hat Herr *Bernstein* auch *die schärfere Ungleichung*

$$(4.)\qquad |\varphi'(\vartheta)| \leqq pM \qquad \textit{für} \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$$

*bewiesen***).

Herr *L. Fejér* hat dann auf Grund dieses Resultates gezeigt, daß die Ungleichung (4.) auch für *beliebige* trigonometrische Polynome von

*) Mémoire couronné par la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique 1912, pag. 19, 20.

**) A. a. O., pag. 19. — Gleichzeitig hat Herr *Bernstein* festgestellt, daß das Gleichheitszeichen in der Formel (4.) nur im Falle $\varphi(\vartheta) = \pm M \sin p\vartheta$, (bzw. $\varphi(\vartheta) = \pm M \cos p\vartheta$) bestehen kann. — Im Jahre 1889 hat Herr *A. Markoff* für die Ableitung einer ganzen rationalen Funktion die analoge Frage gelöst in seiner Arbeit „Sur une question de *Mendelejeff*“ (Académie Impériale de Saint-Pétersbourg).

höchstens p-ter Ordnung und vom absoluten Betrage $\leqq M$ *gültig ist;* so gelangte er zu einer oberen Schranke, die im Falle eines geeigneten trigonometrischen Polynomes auch *wirklich erreicht wird.*

In diesen Zeilen will ich einen neuen Beweis des *Bernstein*schen Satzes geben. Herr *Bernstein* beweist ein entsprechendes Theorem für ganze rationale Funktionen und überträgt sein Resultat auf trigonometrische Polynome. Ich führe den Beweis *direkt* für das trigonometrische Polynom und auf ganz anderer Grundlage. Obzwar ich nur bis zur minder schärferen Ungleichung (3.) gelange, glaube ich doch, daß dieser Beweis einiges Interesse darbietet. Ich stütze mich dabei wesentlich auf zwei — trigonometrische Polynome betreffende — Ergebnisse*) des Herrn *Fejér*, dem ich die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke.

Ich erwähne noch, daß während der Abfassung dieser Zeilen Herr *Marcel Riesz* auf Grund einer von ihm gefundenen Interpolationsformel für die Derivierte eines trigonometrischen Polynomes einen neuen, sehr interessanten Beweis der *Bernstein*schen Ungleichung (4.) veröffentlicht hat**).

2. Der Satz des Herrn *Bernstein* leistet das Folgende:

1°. Er gibt die vollständige Lösung eines *Problems des Maximums.* Er besagt nämlich, daß für die Gesamtheit aller trigonometrischen Polynome von höchstens p-ter Ordnung, die zugleich dem absoluten Betrage nach alle $\leqq M$ sind, das Maximum der absolut genommenen Ableitung gleich pM ist.

2°. Er besagt [schon in seiner minder schärferen Form (3.)], daß der absolute Betrag der Ableitung eines trigonometrischen Polynomes von höchstens p-ter Ordnung, dessen absoluter Betrag $\leqq M$ ist, jedenfalls kleiner als cMp ist, wo c eine *absolute* Konstante bedeutet.

Dieser unter 2°. hervorgehobene Teil des *Bernstein*schen Satzes ist es, der in den Arbeiten der Herren *S. Bernstein*, *Fejér****), *M. Riesz***) An-

*) 1°. „Über trigonometrische Polynome." Dieses Journal, dieser Band, S. 53—82. 2°. „Über konjugierte trigonometrische Reihen." Dieses Journal, Band 144, S. 49.

**) „Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique." Comptes Rendus, T. 158, pag. 1152. S. auch den inzwischen erschienenen Beweis des Herrn *Friedrich Riesz* in der Note: „Sur les polynomes trigonométriques". Comptes Rendus, T. 158, pag. 1657.

***) S. die zweite der in *) zitierten Arbeiten.

wendungen gefunden hat. Die beiden letzteren Autoren benutzen die folgende mit 2^0. äquivalente Tatsache:

Sind die trigonometrischen Polynome

$$\varphi_1(\vartheta),\ \varphi_2(\vartheta),\ \ldots,\ \varphi_n(\vartheta),\ldots,$$

wo $\varphi_n(\vartheta)$ ein trigonometrisches Polynom von höchstens n-ter Ordnung bedeutet, alle absolut genommen $\leqq M$, so sind die Derivierten

$$\varphi_1'(\vartheta),\ \varphi_2'(\vartheta),\ \ldots,\ \varphi_n'(\vartheta),\ldots$$

der Reihe nach absolut genommen kleiner als

$$cM, 2cM, \ldots, ncM, \ldots .$$

Kürzer: *Ist*

$$|\varphi_n(\vartheta)| \leqq M, \qquad (n=1,2,\ldots\infty)$$

so ist

$$\left|\frac{\varphi_n'(\vartheta)}{n}\right| \qquad (n=1,2,\ldots\infty)$$

beschränkt und kleiner als cM.

3. Es sei

$$\varphi(\vartheta) = \lambda_0 + \lambda_1\cos\vartheta + \mu_1\sin\vartheta + \cdots + \lambda_p\cos p\vartheta + \mu_p\sin p\vartheta$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom mit reellen Koeffizienten und von höchstens p-ter Ordnung, das für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ der Ungleichung

$$|\varphi(\vartheta)| \leqq M$$

genügt. Um die Bedeutung der *Bernstein*schen Ungleichung

$$(5.) \qquad |\varphi'(\vartheta)| < cpM \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$$

etwas zu beleuchten, will ich zunächst zwei minder schärfere Abschätzungen für den absoluten Betrag von $\varphi'(\vartheta)$ herleiten, die aber auf einfacherem Wege ermittelt werden können.

Die erste ergibt sich, auf Grund der Integraldarstellung der Koeffizienten:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta, \quad \mu_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta, \quad (k=1,2,\ldots p)$$

aus den Ungleichungen

$$|\lambda_k| < 2M,\ |\mu_k| < 2M.$$

Es ist nämlich

$$|\varphi'(\vartheta)| \leqq \sum_{k=1}^{p}|k\mu_k\cos k\vartheta - k\lambda_k\sin k\vartheta| \leqq \sum_{k=1}^{p}|k\lambda_k| + \sum_{k=1}^{p}|k\mu_k|,$$

also

$$|\varphi'(\vartheta)| \leqq 2Mp(p-1) < 2Mp^2.$$

Die zweite, schärfere Abschätzung erhalte ich, indem ich auf die rechte Seite der Identität

$$(6.)\quad \sum_{k=1}^{p} k(\mu_k \cos k\vartheta - \lambda_k \sin k\vartheta) = p \sum_{k=1}^{p} (\mu_k \cos k\vartheta - \lambda_k \sin k\vartheta) - \\ - \sum_{k=1}^{p-1} (\mu_1 \cos \vartheta - \lambda_1 \sin \vartheta + \cdots + \mu_k \cos k\vartheta - \lambda_k \sin k\vartheta)$$

ein allgemeines Resultat über die Partialsummen von trigonometrischen Reihen, die zu der *Fourier*reihe einer beschränkten Funktion konjugiert sind, anwende. Dieses (von mir schon früher festgestellte) Resultat lautet folgendermaßen:

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische, beschränkte, im *Riemann*schen Sinne integrierbare Funktion von x und

$$(7.)\qquad \sum_{0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die zu ihr gehörige *Fourier*reihe. Dann ist der absolute Betrag der n-ten Partialsumme der zu (7.) konjugierten trigonometrischen Reihe

$$(8.)\qquad \sum_{1}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \sin nx)$$

kleiner als $cM \log n$, wo M die obere Grenze von $|f(x)|$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ und c eine von M und n unabhängige Konstante bezeichnet. Aus (6.) und diesem Resultate folgt

$$|\varphi'(\vartheta)| \leqq pcM \log p + \sum_{k=1}^{p-1} cM \log k < pcM \log p + \sum_{k=1}^{p} cM \log p,$$

also

$$|\varphi'(\vartheta)| < 2cMp \log p.$$

4. Nun will ich zum Beweise der Ungleichung (5.) übergehen. Ist $\varphi(\vartheta)$ ein trigonometrisches Polynom von höchstens p-ter Ordnung, das für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ absolut genommen $\leqq M$ ist, so ist $\varphi(\vartheta) + M$ für dieselben Werte von ϑ ein nichtnegatives Polynom von höchstens p-ter Ordnung, das $\leqq 2M$ ist. Nun kann aber nach dem in Nummer 1. zitierten Ergebnisse*) des Herrn *Fejér* jedes nicht negative trigonometrische Polynom von höchstens p-ter Ordnung als Summe von Quadraten zweier einander konjugierten trigonometrischen Polynome von höchstens p-ter Ordnung dargestellt werden, also

$$(9.)\qquad \varphi(\vartheta) + M = u(\vartheta)^2 + v(\vartheta)^2,$$

wo

$$u(\vartheta) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \vartheta + \beta_1 \sin \vartheta + \cdots + \alpha_p \cos p\vartheta + \beta_p \sin p\vartheta,$$
$$v(\vartheta) = \bar{\alpha}_0 - \beta_1 \cos \vartheta + \alpha_1 \sin \vartheta - \cdots - \beta_p \cos p\vartheta + \alpha_p \sin p\vartheta;$$

hier bedeuten $\alpha_0, \bar{\alpha}_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_p, \beta_p$ reelle Größen. Aus (9.) folgt die für die späteren grundlegende Formel

*) S. die erste der a. S. 89 in *) zitierten Arbeiten.

$$\varphi'(\vartheta) = 2u(\vartheta)u'(\vartheta) + 2v(\vartheta)v'(\vartheta).$$

Es sei

$u_0(\vartheta) = \alpha_0,\ u_1(\vartheta) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta,$

$u_2(\vartheta) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta + \alpha_2 \cos 2\vartheta + \beta_2 \sin 2\vartheta, \ldots, u_p(\vartheta) = u(\vartheta),$

$v_0(\vartheta) = \bar{\alpha}_0,\ v_1(\vartheta) = \bar{\alpha}_0 - \beta_1 \cos\vartheta + \alpha_1 \sin\vartheta,$

$v_2(\vartheta) = \bar{\alpha}_0 - \beta_1 \cos\vartheta + \alpha_1 \sin\vartheta - \beta_2 \cos 2\vartheta + \alpha_1 \sin 2\vartheta, \ldots, v_p(\vartheta) = v(\vartheta);$

weiter

$$U_1(\vartheta) = u_0(\vartheta),\ U_2(\vartheta) = \frac{u_0(\vartheta) + u_1(\vartheta)}{2},$$

$$U_3(\vartheta) = \frac{u_0(\vartheta) + u_1(\vartheta) + u_2(\vartheta)}{3}, \ldots, U_p(\vartheta) = \frac{u_0(\vartheta) + u_1(\vartheta) + \cdots + u_{p-1}(\vartheta)}{p} = U(\vartheta),$$

$$V_1(\vartheta) = v_0(\vartheta),\ V_2(\vartheta) = \frac{v_0(\vartheta) + v_1(\vartheta)}{2},$$

$$V_3(\vartheta) = \frac{v_0(\vartheta) + v_1(\vartheta) + v_2(\vartheta)}{3}, \ldots, V_p(\vartheta) = \frac{v_0(\vartheta) + v_1(\vartheta) + \cdots + v_{p-1}(\vartheta)}{p} = V(\vartheta).$$

Dann hat man, wie Herr *Fejér* gezeigt hat*):

$$U(\vartheta) = u(\vartheta) - \frac{v'(\vartheta)}{p}, \tag{10.}$$

$$V(\vartheta) = v(\vartheta) + \frac{u'(\vartheta)}{p}. \tag{11.}$$

Aus (10.) und (11.) folgt unmittelbar

$$\frac{u(\vartheta)u'(\vartheta) + v(\vartheta)v'(\vartheta)}{p} = u(\vartheta)V(\vartheta) - v(\vartheta)U(\vartheta),$$

also

$$\varphi'(\vartheta) = 2p[u(\vartheta)V(\vartheta) - v(\vartheta)U(\vartheta)]. \tag{12.}$$

Aus der Gleichung (12.) aber läßt sich schon die Ungleichung (5.) sehr leicht ableiten. Es ist nämlich für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$

$$|u(\vartheta)| \leqq \sqrt{2M},\quad |v(\vartheta)| \leqq \sqrt{2M}, \tag{13.}$$

da doch

$$\varphi(\vartheta) + M = u(\vartheta)^2 + v(\vartheta)^2 \leqq 2M.$$

Weiter ist, mit Rücksicht auf (13.), auf Grund eines bekannten *Fejér*schen Resultates über die arithmetischen Mittel der Partialsummen einer *Fourier*-reihe,

$$|U(\vartheta)| \leqq \sqrt{2M},\quad |V(\vartheta)| \leqq \sqrt{2M} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi. \tag{14.}$$

Also ist [nach (12.), (13.) und (14.)],

$$|\varphi'(\vartheta)| \leqq 2p\{|u(\vartheta)V(\vartheta)| + |v(\vartheta)U(\vartheta)|\} \leqq 2p\{2M + 2M\},$$

also schließlich

*) In der zweiten der a. S. 89 in *) zitierten Arbeiten.

(15.) $|\varphi'(\vartheta)| \leqq 8pM$ für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, q. e. d.

5. In dieser Nummer werde ich zeigen, wie man die Konstante 8 in der Ungleichung (15.) auf 2 herunterdrücken kann. Um

(16.) $$|\varphi'(\vartheta)| \leqq 2pM \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$$

zu beweisen, genügt (nach *Fejér*) folgendes zu zeigen:

Bezeichnet $\psi(\vartheta)$ ein *beliebiges Sinuspolynom* von höchstens p-ter Ordnung, für welches $|\psi(\vartheta)| \leqq M$, $(0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$, *so ist*

(17.) $$|\psi'(0)| \leqq 2pM.$$

Denn, bedeutet $\varphi(\vartheta)$ ein beliebiges trigonometrisches Polynom in ϑ von höchstens p-ter Ordnung und vom absoluten Betrage $\leqq M$, so ist

(18.) $$\psi(t) = \frac{\varphi(\vartheta + t) - \varphi(\vartheta - t)}{2} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

ein reines Sinuspolynom in t von höchstens p-ter Ordnung und ebenfalls absolut genommen $\leqq M$. Es ist aber, mit Rücksicht auf (18.),

$$\psi'(0) = \varphi'(\vartheta),$$

also ist, auf Grund von (17.),

$$|\varphi'(\vartheta)| = |\psi'(0)| \leqq 2pM, \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi).$$

Ich kann mich also auf den Beweis der Ungleichung (17.) beschränken.

Setzen wir wiederum

(19.) $$\psi(\vartheta) + M = u(\vartheta)^2 + v(\vartheta)^2.$$

Dann folgt nach (12.)

$$\frac{\psi'(0)}{2p} = u(0)\,V(0) - v(0)\,U(0).$$

Nach der bekannten *Fejér*schen Integralformel für die arithmetischen Mittel der Partialsummen einer *Fourier*reihe ist

$$U(0) = \int_0^{2\pi} \frac{u(t)}{2p\pi} \left(\frac{\sin \frac{pt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt$$

und

$$V(0) = \int_0^{2\pi} \frac{v(t)}{2p\pi} \left(\frac{\sin \frac{pt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt,$$

also

$$\frac{\psi'(0)}{2p} = \int_0^{2\pi} \frac{u(0)\,v(t) - v(0)\,u(t)}{2p\pi} \left(\frac{\sin \frac{pt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt.$$

Nun ist aber

$$|u(0)v(t)| \leqq \frac{u(0)^2+v(t)^2}{2}, \quad |v(0)u(t)| \leqq \frac{v(0)^2+u(t)^2}{2},$$

daher

$$(20.) \quad \left|\frac{\psi'(0)}{2p}\right| \leqq \frac{1}{2p\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(0)^2+v(0)^2+u(t)^2+v(t)^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{pt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

Mit Rücksicht auf (19.) folgt also aus (20.)

$$(21.) \quad \left|\frac{\psi'(0)}{2p}\right| \leqq M\int_0^{2\pi} \frac{1}{2p\pi}\left(\frac{\sin\frac{pt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(\vartheta)}{2p\pi}\left(\frac{\sin\frac{pt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt.$$

Auf der rechten Seite von (21.) hat das erste Integral den Wert 1, das zweite aber verschwindet, folglich liefert (21.) die gewünschte Ungleichung

$$\left|\frac{\psi'(0)}{2p}\right| \leqq M.$$

*Laplace*sche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen.

Von Herrn *J. Horn* in Darmstadt.

Die Anwendung der *Borel*schen Summation divergenter Reihen*) auf eine Potenzreihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

mit dem Konvergenzradius 0 kommt darauf hinaus, die Reihe S durch das *Laplace*sche Integral

$$y = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} v(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

zu ersetzen, wo

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n t^n}{n!}$$

ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Potenzreihe $v(t)$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt, daß sie sich, wenn sie auch nicht beständig konvergiert, doch längs einer von $t = 0$ ins Unendliche gehenden Geraden fortsetzen läßt und daß das über diese Gerade erstreckte *Laplace*sche Integral in einem an den Punkt $x = 0$ grenzenden Gebiet der x-Ebene konvergiert. Durch partielle Integration erhält man

$$y = \int_0^{\infty} w(t) e^{-\frac{t}{x}} dt, \text{ wo } w(t) = \frac{dv}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

ist.

Genügt die Potenzreihe S einer Differentialgleichung

*) Vgl. *Borel*, Leçons sur les séries divergentes (Paris 1901), S. 87 ff.

$$x^2\frac{dy}{dx}+y=f(x,y),$$

wo

$$f(x,y)=\Sigma A_{\lambda\mu}x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda=1,\ \mu=0;\ \lambda+\mu\geq 2)$$

in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ regulär ist, so genügt die Funktion $w(t)$, wie ich in einer früheren Arbeit*) gezeigt habe, einer nicht linearen Integralgleichung vom *Volterra*schen Typus, aus welcher sich die erforderlichen Eigenschaften von $w(t)$ ergeben**). Man erhält so eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung in Form eines *Laplace*schen Integrals, aus welchem die asymptotische Darstellung der Lösung durch die divergente Potenzreihe S und ihre Entwicklung in eine konvergente Fakultätenreihe folgt.

Im vorliegenden Aufsatz wird gezeigt, daß sich dieselbe Methode auf verschiedene Klassen von Funktionalgleichungen anwenden läßt, welche durch divergente Potenzreihen formal befriedigt werden. Im ersten Teil wird die nicht lineare Differenzengleichung

$$(D.) \qquad y(x+1)=ay(x)+f\Big(\frac{1}{x},y(x)\Big)$$

betrachtet, wo a eine von 1 verschiedene Konstante und

$$f\Big(\frac{1}{x},y\Big)=\Sigma A_{\lambda\mu}\Big(\frac{1}{x}\Big)^\lambda y^\mu \qquad (\lambda=1,\ \mu=0;\ \lambda+\mu\geq 2)$$

eine in der Umgebung von $x=\infty$, $y=0$ reguläre Funktion ist***). Der zweite Teil beschäftigt sich mit der linearen, nicht homogenen *Volterra*schen Integralgleichung

$$(J.) \qquad x^2\frac{d\varphi(x)}{dx}+(1-ax)\varphi(x)=\int_0^x F(x,y)\varphi(y)\,dy+G(x),$$

wo

$$F(x,y)=\Sigma A_{\lambda\mu}x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda,\mu=0,1,2,\ldots)$$

in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ und

$$G(x)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}B_\lambda x^\lambda$$

---

*) *Laplace*sche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen (Dieses Journal, Bd. 144, S. 167).

**) *Borel* (Journ. de Math. 1899, S. 99—104) hat nur gezeigt, daß $v(t)$ einen endlichen Konvergenzradius besitzt.

***) Vgl. die Behandlung nicht linearer Differenzengleichungen mit der Methode sukzessiver Annäherungen in der Arbeit des Verf. „Zur Theorie der nicht linearen Differential- und Differenzengleichungen“ (Dieses Journal, Bd. 141).

in der Umgebung von $x=0$ regulär ist. Die Gleichung (J.) geht aus der von *Volterra* behandelten Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

hervor, wenn

$$H(x,y) = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu, \qquad (\lambda,\mu = 0,1,2,\ldots)$$

$$a_{00}=0,\ a_{10}\neq 0,\ a_{10}+a_{01}=0,\ a_{20}+a_{11}+a_{02}\neq 0$$

und

$$f(x) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$$

ist*).

Die Differenzengleichung (D.) wird durch eine Potenzreihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{x^n},$$

die Integralgleichung (J.) durch eine Potenzreihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

formal befriedigt. Der Reihe S ordnen wir im ersten Falle ein der Gleichung (D.) genügendes *Laplace*sches Integral

$$y(x) = \int_0^\infty w(t)\,e^{-tx}\,dt$$

zu, wo $w(t)$ einer nicht linearen Integralgleichung genügt, im zweiten Falle ein der Gleichung (J.) genügendes *Laplace*sches Integral

$$\varphi(x) = \int_0^\infty w(t)\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

wo $w(t)$ durch eine lineare Integralgleichung bestimmt wird. Das *Laplace*sche Integral wird in jedem Falle durch die Potenzreihe S asymptotisch dargestellt und gestattet die Entwicklung in eine konvergente Fakultätenreihe.

Die Funktionalgleichungen (D.) und (J.) sollen nur als Beispiele für die Anwendung einer auch in anderen Fällen verwendbaren Methode dienen.

---

*) Vgl. die Arbeit des Verf. „*Volterra*sche Integralgleichungen und Summengleichungen“ im 140. Bd. dieses Journals. Zur Einführung in die Theorie der *Volterra*schen Integralgleichungen dienen die Bücher über Integralgleichungen von *Volterra* (Paris 1913) und *Lalesco* (Paris 1912).

I. Die Anwendung der *Laplace*schen Transformation auf eine nicht lineare Differenzengleichung.

§ 1.

In der nicht linearen Differenzengleichung

$$(D.) \qquad y(x+1) = a\,y(x) + f\Big(\frac{1}{x}, y(x)\Big)$$

sei a eine von 1 verschiedene Konstante und

$$f\Big(\frac{1}{x}, y\Big) = \Sigma A_{\lambda\mu}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\lambda} y^{\mu} \qquad (\lambda=1, \mu=0;\ \lambda+\mu \geq 2)$$

eine Potenzreihe, welche für hinreichend große Werte von $|x|$ und hinreichend kleine Werte von $|y|$ konvergiert. Wir suchen eine analytische Lösung der Differenzengleichung (D.) in der Form

$$y(x) = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-tx}\, dt$$

darzustellen; als Integrationsweg wählen wir eine Gerade der t-Ebene, welche mit einem geeigneten Argument ω von $t=0$ ins Unendliche geht*).

Es ist

$$y(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} w(t)\, e^{-tx}\, dt.$$

Das Produkt der beiden Integrale

$$\int_0^{\infty} w_1(t)\, e^{-tx}\, dt, \quad \int_0^{\infty} w_2(t)\, e^{-tx}\, dt$$

ist gleich**)

$$\int_0^{\infty} w_1 w_2(t)\, e^{-tx}\, dt;$$

dabei ist

$$w_1 w_2(t) = \int_0^{t} w_1(\tau)\, w_2(t-\tau)\, d\tau,$$

wo über die Gerade $0 \ldots t$ integriert wird. Demnach ist für $\mu = 2, 3, \ldots$

$$\big(y(x)\big)^{\mu} = \int_0^{\infty} w^{\mu}(t)\, e^{-tx}\, dt,$$

wenn $w^{\mu}(t)$ durch die Rekursionsformel

$$w^{\mu}(t) = \int_0^{t} w(\tau)\, w^{\mu-1}(t-\tau)\, d\tau$$

---

*) Die im folgenden vorzunehmenden Umformungen erweisen sich, nachdem die Eigenschaften von $w(t)$ in § 2 ermittelt sind, als zulässig, wenn x dem in § 3 angegebenen Gebiet angehört.

**) Dieses Journal, Bd. 144, S. 171.

definiert wird. Für $-\frac{\pi}{2}-\omega<\arg x<\frac{\pi}{2}-\omega$ ist

$$\frac{1}{x^\lambda}=\frac{1}{(\lambda-1)!}\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-tx}\,dt\,^*).$$

Demnach ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{A_{\lambda\mu}}{x^\lambda}=\int_0^\infty\sum_{\lambda=1}^{\infty}A_{\lambda\mu}\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}e^{-tx}\,dt=\int_0^\infty G_\mu(t)e^{-tx}\,dt$$

unter Einführung der ganzen transzendenten Funktion

$$G_\mu(t)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}A_{\lambda\mu}\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}. \qquad (\mu=0,1,2,\ldots)$$

Nach dem Satze über die Multiplikation *Laplace*scher Integrale ist für $\mu=1,2,\ldots$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{A_{\lambda\mu}}{x^\lambda}\cdot\big(y(x)\big)^\mu=\int_0^\infty G_\mu w^\mu(t)\cdot e^{-tx}\,dt;$$

dabei ist

$$G_\mu w^\mu(t)=\int_0^t G_\mu(t-\tau)\,w^\mu(\tau)\,d\tau.$$

Hiernach ist

$$y(x+1)-a\,y(x)-f\Big(\frac{1}{x},y(x)\Big)=\int_0^\infty We^{-tx}\,dt.$$

Demnach ist $y(x)$ eine Lösung der Differenzengleichung (D.), wenn $w(t)$ der Differenzengleichung $W=0$, der *Laplace*schen Transformierten von (D.), genügt:

$$\text{(E.)}\qquad (e^{-t}-a)\,w(t)=G_0(t)+\sum_{\mu=2}^{\infty}A_{0\mu}w^\mu(t)+\sum_{\mu=1}^{\infty}G_\mu w^\mu(t).$$

Wenn die Potenzreihe $f\big(\frac{1}{x},y\big)$ für $|x|=h$, $|y|=\frac{1}{k}$ konvergiert, ist

$$|A_{\lambda\mu}|\leqq Gh^\lambda k^\mu,$$

wo G eine von λ und μ unabhängige positive Größe ist, und

$$|G_\mu(t)|\leqq Ghk^\mu e^{h|t|}.$$

Wir beweisen den Satz**):

Wenn die Differenzengleichung (D.) durch die Reihe

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{x^n}$$

formal befriedigt wird, so wird die Integralgleichung (E.) durch die Reihe

---

*) Dieses Journal, Bd. 143, S. 223.

**) Vgl. dieses Journal, Bd. 144, S. 173.

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

befriedigt.

Aus der für $y(x)$ angesetzten Reihe folgt

$$y(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{x^n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n - \binom{n-1}{1}C_{n-1} + \binom{n-1}{2}C_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}C_1}{x^n}.$$

Wenn man

$$(y(x))^{\mu} = \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{C_n^{(\mu)}}{x^n},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{A_{\lambda\mu}}{x^{\mu}} \cdot (y(x))^{\mu} = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} \frac{D_n^{(\mu)}}{x^n}$$

setzt, so hängt $C_n^{(\mu)}$ von $C_1, \ldots C_{n-\mu+1}$ und $D_n^{(\mu)}$ von $C_1, \ldots C_{n-\mu}$ ab. Aus der Differenzengleichung (D.) ergibt sich die zur Bestimmung von C_n dienende Rekursionsformel

$$(1-a)C_n - \binom{n-1}{1}C_{n-1} + \binom{n-1}{2}C_{n-2} - \cdots = A_{n0} + \sum_{\mu=2}^{\infty} A_{0\mu} C_n^{(\mu)} + \sum_{\mu=1}^{\infty} D_n^{(\mu)}.$$

Setzt man

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

so ist

$$e^{-t} w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n - \binom{n-1}{1}C_{n-1} + \binom{n-1}{2}C_{n-2} - \cdots\right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$w^{\mu}(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} C_n^{(\mu)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad G_{\mu} w^{\mu}(t) = \sum_{n=\mu+1}^{\infty} D_n^{(\mu)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Demnach befriedigt $w(t)$ die Integralgleichung (E.), wenn C_n der obigen Rekursionsformel genügt.

§ 2.

Die Funktion $e^{-t} - a$, welche auf der linken Seite der Integralgleichung (E.) als Faktor von $w(t)$ vorkommt, verschwindet für

$$t = s + 2\nu\pi i; \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

dabei ist

$$s = -\log|a| - i \arg a,$$

wo der reelle Wert von $\log|a|$ genommen wird und $\arg a$ die Bedingung $-\pi < \arg a \leqq \pi$ erfüllt. Die Funktion $e^{-t} - a$ strebt dem Grenzwert $-a$ oder dem Grenzwert ∞ zu, je nachdem t mit einem Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ oder mit einem Argument zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ ins Unend-

liche geht. Wir haben a von 1 verschieden vorausgesetzt, so daß s von Null verschieden ist. Da keine der Größen $s+2\nu\pi i$ $(\nu=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ einen kleineren absoluten Betrag als s hat, so liegt im Innern des um $t=0$ mit dem Radius $|s|$ beschriebenen Kreises keine Nullstelle der Funktion $e^{-t}-a$.

Wird t auf den Kreis $\mathfrak{K}$

$$|t| \leqq |s|-\varepsilon \qquad (0<\varepsilon<|s|)$$

beschränkt, so liegt $|e^{-t}-a|$ über einer gewissen von Null verschiedenen positiven Größe.

Wir führen die folgenden Sektoren ein:

1. im Falle $|a|<1$ oder $\Re(s)>0$ den Sektor $\mathfrak{S}'_\nu$ $(\nu=\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$

$$\arg(s+2\nu\pi i)+\theta \leqq \arg t \leqq \arg(s+2(\nu+1)\pi i)-\theta,$$

$$0<\theta<\frac{\arg(s+2(\nu+1)\pi i)-\arg(s+2\nu\pi i)}{2}$$

und den Sektor $\mathfrak{S}''$

$$\frac{\pi}{2}+\theta \leqq \arg t \leqq \frac{3\pi}{2}-\theta \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

2. im Falle $|a|>1$ oder $\Re(s)<0$ den Sektor $\mathfrak{S}'$

$$-\frac{\pi}{2}+\theta \leqq \arg t \leqq \frac{\pi}{2}-\theta \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

und den Sektor $\mathfrak{S}''_\nu$ $(\nu=\cdots 2, 1, 0, -1, -2, \ldots)$

$$\arg(s+2(\nu+1)\pi i)+\theta \leqq \arg t \leqq \arg(s+2\nu\pi i)-\theta,$$

$$0<\theta<\frac{\arg(s+2\nu\pi i)-\arg(s+2(\nu+1)\pi i)}{2},$$

3. im Falle $|a|=1$, $\Re(s)=0$ den Sektor $\mathfrak{S}'$

$$-\frac{\pi}{2}+\theta \leqq \arg t \leqq \frac{\pi}{2}-\theta \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

und den Sektor $\mathfrak{S}''$

$$\frac{\pi}{2}+\theta \leqq \arg t \leqq \frac{3\pi}{2}-\theta \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Auch in einem einzelnen dieser Sektoren hat $|e^{-t}-a|$ eine positive untere Grenze.

Wenn wir t auf ein Gebiet $\mathfrak{T}$ beschränken, welches aus dem Kreise $\mathfrak{K}$ und *einem* der genannten Sektoren, den wir $\mathfrak{S}$ nennen, besteht, ist

$$|e^{-t}-a| \geqq N>0.$$

Die reellen positiven Größen $\mathfrak{A}_{\lambda\mu}$ und $\mathfrak{G}$ seien so gewählt, daß

$$\frac{|A_{\lambda\mu}|}{N} \leqq \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \leqq \mathfrak{G} h^\lambda k^\mu$$

ist. Wenn man, unter t eine reelle positive Veränderliche verstehend,

$$\mathfrak{G}_\mu(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

setzt, ist

$$\mathfrak{G}_\mu(t) \leqq \mathfrak{G} h k^\mu e^{ht}, \quad \frac{|G_\mu(t)|}{N} \leqq \mathfrak{G}_\mu(|t|).$$

Für die Integralgleichung

$$(\mathfrak{E}.) \qquad \mathfrak{w}(t) = \mathfrak{G}_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \mathfrak{A}_{0\mu} \mathfrak{w}^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\mu \mathfrak{w}^\mu(t),$$

die *Laplace*sche Transformierte der Gleichung

$$(\mathfrak{D}.) \qquad \mathfrak{y} = \Sigma \mathfrak{A}_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{\mathfrak{x}}\right)^\lambda \mathfrak{y}^\mu, \qquad (\lambda=1, \mu=0;\ \lambda+\mu \geq 2)$$

gelten die Betrachtungen in Bd. 144, S. 175. Die Gleichung $(\mathfrak{D}.)$ wird durch eine für hinreichend große Werte von $|\mathfrak{x}|$ konvergente Potenzreihe

$$\mathfrak{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{C}_n}{\mathfrak{x}^n}$$

mit positiven Koeffizienten $\mathfrak{C}_n$, die Integralgleichung $(\mathfrak{E}.)$ durch die beständig konvergente Potenzreihe

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

befriedigt. Es sind positive Größen $\mathfrak{C}$ und σ so vorhanden, daß

$$\mathfrak{C}_n \leqq \mathfrak{C} \sigma^n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

ist; dann ist, wenn $\mathfrak{C}\sigma = K$ gesetzt wird, für reelle positive t

$$\mathfrak{w}(t) \leqq K e^{\sigma t}.$$

Die Integralgleichung mit dem Parameter α

$$\mathfrak{w}(t) = \mathfrak{G}_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha^\mu \mathfrak{A}_{0\mu} \mathfrak{w}^\mu(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha^\mu \mathfrak{G}_\mu \mathfrak{w}^\mu(t)$$

wird durch eine Potenzreihe von α

$$\mathfrak{w}(t) = \mathfrak{w}_0(t) + \alpha \mathfrak{w}_1(t) + \alpha^2 \mathfrak{w}_2(t) + \cdots$$

befriedigt; $\mathfrak{w}_0(t), \mathfrak{w}_1(t), \mathfrak{w}_2(t), \ldots$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_0(t) &= \mathfrak{G}_0(t), \\ \mathfrak{w}_1(t) &= \mathfrak{G}_1 \mathfrak{w}_0(t), \\ \mathfrak{w}_2(t) &= \mathfrak{G}_1 \mathfrak{w}_1(t) + \mathfrak{A}_{02} \mathfrak{w}_0^2(t) + \mathfrak{G}_2 \mathfrak{w}_0^2(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

als beständig konvergente Potenzreihen von t mit positiven Koeffizienten.

Für $\alpha = 1$ hat man die der Integralgleichung (𝔈.) genügende, für jeden endlichen Wert von t konvergente Reihe

$$\mathfrak{w}(t) = \mathfrak{w}_0(t) + \mathfrak{w}_1(t) + \mathfrak{w}_2(t) + \cdots,$$

welche die oben eingeführte ganze transzendente Funktion

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

darstellt.

Die Integralgleichung mit dem Parameter α

$$(e^{-t} - a)\, w(t) = G_0(t) + \sum_{\mu=2}^{\infty} \alpha^{\mu} A_{0\mu} w^{\mu}(t) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha^{\mu} G_{\mu} w^{\mu}(t),$$

die wir an die Stelle von (E.) setzen, wird durch eine Potenzreihe von α

$$w(t) = w_0(t) + \alpha w_1(t) + \alpha^2 w_2(t) + \cdots$$

zunächst formal befriedigt; dabei ist

$$\begin{aligned}
&(e^{-t} - a)\, w_0(t) = G_0(t),\\
&(e^{-t} - a)\, w_1(t) = G_1 w_0(t),\\
&(e^{-t} - a)\, w_2(t) = G_1 w_1(t) + A_{02} w_0^2(t) + G_2 w_0^2(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

In dem Gebiet $\mathfrak{T}$ der t-Ebene ist

$$|w_\nu(t)| \leqq \mathfrak{w}_\nu(|t|). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Reihe

$$w(t) = w_0(t) + w_1(t) + w_2(t) + \cdots,$$

welche demnach in jedem im Endlichen gelegenen Stück des Gebietes $\mathfrak{T}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, genügt der Integralgleichung (E.). Die Funktion $w(t)$ läßt sich in die für $|t| < |s|$ konvergente Potenzreihe

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entwickeln. In dem betrachteten Sektor $\mathfrak{S}$ ist

$$|w(t)| \leqq K e^{\sigma|t|}.$$

Da die Reihe

$$\int_0^t w(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^n}{n!}$$

für $|t| = \dfrac{|s|}{1+\delta}$ konvergiert, wo δ eine beliebig kleine positive Größe ist, so ist

$$|C_n| < A n! \left(\frac{1+\delta}{|s|}\right)^n,$$

wo A eine endliche positive Größe darstellt.

§ 3.

Das Integral

$$\eta(x) = \int_0^\infty w(t) e^{-tx}\, dt,$$

erstreckt über die im Sektor $\mathfrak{S}$ verlaufende Gerade $\arg t = \omega$, ist in der Halbebene

$$\Re(e^{i\omega} x) > \sigma$$

konvergent und genügt der Differenzengleichung (D.).

Wir bezeichnen das Integral η mit $\eta'_\nu, \eta'', \eta', \eta''$, je nachdem der Integrationsweg in dem Sektor $\mathfrak{S}'_\nu, \mathfrak{S}''_\nu, \mathfrak{S}', \mathfrak{S}''$ verläuft (§ 2). Wir unterscheiden die drei Fälle $|a| < 1$, $|a| > 1$ und $|a| = 1$.

1. Es sei $|a| < 1$ oder $\Re(s) > 0$. Ist $\mathfrak{S}$ der Sektor $\mathfrak{S}''$

$$-\frac{3\pi}{2} + \theta \leqq \omega \leqq -\frac{\pi}{2} - \theta,$$

so gehört die Gesamtheit der Halbebenen $\Re(e^{i\omega} x) > \sigma$ dem Sektor

$$\theta \leqq \arg x \leqq 2\pi - \theta$$

an. In diesem Sektor wird die Funktion $\eta''(x)$ durch die der Differenzengleichung (D.) formal genügende Potenzreihe S gleichmäßig asymptotisch dargestellt*). Wenn $\mathfrak{S}$ der Sektor $\mathfrak{S}'_\nu$

$$\arg(s + 2\nu\pi i) + \theta \leqq \omega \leqq \arg(s + 2(\nu+1)\pi i) - \theta$$

ist, gehört das Gültigkeitsgebiet des Integrals $\eta'_\nu(x)$ dem Sektor

$$-\frac{\pi}{2} - \arg(s + 2(\nu+1)\pi i) + \theta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \arg(s + 2\nu\pi i) - \theta$$

an; in diesem Sektor gilt die asymptotische Darstellung des Integrals $\eta'_\nu(x)$ durch die Reihe S. Die asymptotische Darstellung des Integrals $\eta'_{\nu-1}(x)$ durch die Reihe S gilt in dem Sektor

$$-\frac{\pi}{2} - \arg(s + 2\nu\pi i) + \theta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \arg(s + 2(\nu-1)\pi i) - \theta.$$

Die beiden Sektoren, welche den Integralen $\eta'_\nu(x)$ und $\eta'_{\nu-1}(x)$ entsprechen, haben das Gebiet

$$-\frac{\pi}{2} - \arg(s + 2\nu\pi i) + \theta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \arg(s + 2\nu\pi i) - \theta$$

gemeinsam. Je nachdem s unterhalb oder oberhalb der reellen Achse liegt, d. h. je nachdem das Argument von a zwischen 0 und π oder

*) Beweis wie Math. Ann., Bd. 49, S. 454—464 und Bd. 50, S. 527—531.

zwischen 0 und $-\pi$ liegt, gehört das Gebiet $-\frac{\pi}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2}$ dem Gültigkeitsgebiet von η_0' oder von η_{-1}' an.

2. Es sei $|a| > 1$ oder $\Re(s) < 0$. Dann wird das Integral $\eta'(x)$ für

$$-\pi + \theta \leqq \arg x \leqq \pi - \theta$$

und das Integral $\eta_\nu''(x)$ für

$$-\frac{\pi}{2} - \arg(s + 2\nu\pi i) + \theta \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{2} - \arg(s + 2(\nu+1)\pi i) - \theta$$

durch die Reihe S asymptotisch dargestellt. Das Gebiet

$$\frac{\pi}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{3\pi}{2}$$

gehört dem Gültigkeitsgebiet von η_0'' oder von η_{-1}'' an, je nachdem s unterhalb oder oberhalb der reellen Achse liegt*).

3. Es sei $|a| = 1$, $a \neq 1$ oder $\Re(s) = 0$, $s \neq 0$. Dann wird das Integral $\eta'(x)$ für

$$-\pi + \theta \leqq \arg x \leqq \pi - \theta$$

und das Integral $\eta''(x)$ für

$$\theta \leqq \arg x \leqq 2\pi - \theta$$

durch die Reihe S asymptotisch dargestellt.

Das Ergebnis von §§ 1—3 läßt sich in folgendem Satz aussprechen:

Die Differenzengleichung

$$(D.) \qquad y(x+1) = a\,y(x) + f\Big(\frac{1}{x}, y(x)\Big),$$

worin a eine von 1 verschiedene Konstante und

$$f\Big(\frac{1}{x}, y\Big) = \Sigma A_{\lambda\mu}\Big(\frac{1}{x}\Big)^\lambda y^\mu \qquad (\lambda=1, \mu=0;\ \lambda+\mu \geq 2)$$

---

*) *K. P. Williams* behandelt (Transactions of the Amer. Math. Soc. 1913, S. 209 ff.) ein System nicht homogener linearer Differenzengleichungen unter Benutzung der *Birkhoff*schen Theorie der Systeme homogener linearer Differenzengleichungen und der Methode der Variation der Konstanten. Eine einzige lineare Differenzengleichung

$$y(x+1) = \Big(a + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\Big) y(x) + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots$$

kann als Spezialfall sowohl des von *Williams* betrachteten linearen Systems als auch der nicht linearen Differenzengleichung (D.) angesehen werden. Man vergleiche die Sätze a. a. O. S. 235 oben mit unseren Sätzen über die asymptotische Darstellung der Integrale η'' und η_0' bzw. η_{-1}' im Falle $|a| < 1$ und der Integrale η' und η_0'' bzw. η_{-1}'' im Falle $|a| > 1$.

eine in der Umgebung von $x=\infty$, $y=0$ reguläre Funktion ist, wird durch eine für $y(x)$ eingesetzte (im allgemeinen divergente) Potenzreihe

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{x^n}$$

formal befriedigt. Die Differenzengleichung (D.) *hat als Laplacesche Transformierte die Integralgleichung*

$$(E.)\qquad (e^{-t}-a)\,w(t)=G_0(t)+\sum_{\mu=2}^{\infty}A_{0\mu}\,w^{\mu}(t)+\sum_{\mu=1}^{\infty}G_{\mu}\,w^{\mu}(t);$$

dabei ist $w^{\mu}(t)$ durch die Rekursionsformel

$$w^{\mu}(t)=\int_0^t w(\tau)\,w^{\mu-1}(t-\tau)\,d\tau$$

definiert; es ist

$$G_{\mu}(t)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}A_{\lambda\mu}\frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\quad \text{und}\quad G_{\mu}\,w^{\mu}(t)=\int_0^t G_{\mu}(t-\tau)\,w^{\mu}(\tau)\,d\tau.$$

Es sei

$$a=e^{-s}.$$

Die von $t=0$ durch die singulären Punkte $t=s+2\nu\pi i$ ($\nu=\dots-2,-1,0,1,2,\dots$) ins Unendliche gehenden Strahlen zerlegen die eine Halbebene in Sektoren $\mathfrak{R}$; als ein solcher Sektor gilt auch die ganze andere Halbebene (im Falle $\Re(s)=0$ sind beide Halbebenen unzerlegt). Die Integralgleichung (E.) *besitzt eine Lösung $w(t)$, welche sich in die für $|t|<|s|$ konvergente Potenzreihe*

$$w(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entwickeln läßt. In einem Sektor $\mathfrak{S}$, dessen Begrenzungsstrahlen zwischen denjenigen des Sektors $\mathfrak{R}$ liegen, ist

$$|w(t)|\leqq Ke^{\sigma|t|},$$

wo K und σ von t unabhängige positive Größen sind. Das Laplacesche Integral

$$\eta(x)=\int_0^{\infty}w(t)\,e^{-tx}\,dt,$$

welches über eine dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehörende Gerade $\arg t=\omega$ erstreckt wird, konvergiert in der Halbebene $\Re(e^{i\omega}x)>\sigma$ und stellt eine analytische Lösung der Differenzengleichung (D.) *dar.*

II. Die Anwendung der *Laplace*schen Transformation auf eine *Volterra*sche Integralgleichung.

§ 4.

Die *Volterra*sche Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

mit dem in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ regulären Kern

$$H(x,y) = \Sigma a_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda,\mu = 0,1,2,\ldots)$$

bietet eine einer Unbestimmtheitsstelle einer linearen Differentialgleichung entsprechende Singularität dar, wenn $a_{00}=0$, $a_{10}+a_{01}=0$, $a_{10}\neq 0$ ist; wir setzen $a_{20}+a_{11}+a_{02}\neq 0$ voraus; $f(x)$ sei in der Umgebung von $x=0$ regulär und es sei $f(0)=0$, $f'(0)=0$*). Durch Differentiation der Integralgleichung erhält man die Gleichung

$$H(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\varphi(y)dy = f'(x)$$

und durch nochmalige Differentiation

$$H(x,x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \left[\frac{dH(x,x)}{dx} + \left(\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\right)_{y=x}\right]\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}\varphi(y)dy = f''(x)$$

oder, wenn durch

$$\frac{H(x,x)}{x^2} = a_{20} + a_{11} + a_{02} + (a_{30} + a_{21} + \cdots)x + \cdots$$

dividiert wird,

$$x^2\frac{d\varphi(x)}{dx} + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)\varphi(x) + \int_0^x \frac{x^2\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}}{H(x,x)}\varphi(y)dy = \frac{x^2 f''(x)}{H(x,x)},$$

wo

$$a_0 = \frac{a_{10}}{a_{20}+a_{11}+a_{02}}$$

ist. Wenn man

$$\varphi(x) = \psi(x)e^{-a_2 x - a_3\frac{x^2}{2} - \cdots}$$

setzt, erhält man

$$x^2\frac{d\psi(x)}{dx} + (a_0 + a_1 x)\psi(x) + \int_0^x \frac{x^2\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}}{H(x,x)} e^{a_2(x-y)+\frac{a_3}{2}(x^2-y^2)+\cdots}\psi(y)dy = \frac{x^2 f''(x)}{H(x,x)} e^{a_2 x + a_3\frac{x^2}{2} + \cdots}.$$

Durch die Substitution $x = a_0 x'$, $y = a_0 y'$ erreicht man, daß a_0 durch 1 ersetzt wird.

*) Dieses Journal, Bd. 140, S. 120ff.

Man kann demnach eine Integralgleichung von folgender Form zugrunde legen:

$$(\text{J.}) \qquad x^2 \frac{d\varphi(x)}{dx} + (1 - ax)\varphi(x) = \int_0^x F(x, y)\varphi(y)\,dy + G(x);$$

dabei ist

$$F(x, y) = \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ und

$$G(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda x^\lambda \text{*)}$$

in der Umgebung von $x = 0$ regulär.

Wir suchen eine Lösung der Integralgleichung (J.) in der Form

$$\varphi(x) = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$$

darzustellen, wobei über die Gerade $\arg t = \omega$ integriert wird. Dann ist**)

$$x^2 \frac{d\varphi(x)}{dx} = \int_0^\infty t w(t) e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Ferner ist

$$x\varphi(x) = \int_0^\infty \int_0^t w(t)\,dt \cdot e^{-\frac{t}{x}} dt,$$

falls

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t w(t)\,dt = 0$$

ist. Durch wiederholte partielle Integration findet man

$$x^\mu \varphi(x) = \int_0^\infty \int_0^{t^{(\mu)}} w(t)\,dt^\mu \cdot e^{-\frac{t}{x}} dt \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^{t^{(\mu')}} w(t)\,dt^{\mu'} = 0. \qquad (\mu' = 1, 2, \ldots \mu)$$

Es ist

$$\int_0^x e^{-\frac{t}{y}} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{t} e^{-\frac{t}{x}}$$

unter der Bedingung

---

*) Dadurch, daß man $\varphi(x)$ um eine geeignete Konstante vermehrt, erreicht man, daß $G(0) = 0$ wird.

**) Die im folgenden vorzunehmenden Umformungen lassen sich für ein gewisses Gebiet der x-Ebene nachträglich rechtfertigen (§ 6).

$$\lim_{x=0} e^{-\frac{t}{x}} = 0.$$

Der Ausdruck

$$\int_0^x y^\mu \varphi(y)\, dy = \int_0^x y^{\mu+2} \varphi(y) \cdot \frac{dy}{y^2}$$

geht, wenn man

$$y^{\mu+2} \varphi(y) = \int_0^\infty \int_0^t {}^{(\mu+2)}w(t)\, dt^{\mu+2} \cdot e^{-\frac{t}{y}} dt$$

setzt und unter dem Integralzeichen nach y integriert, über in

$$\int_0^\infty dt \int_0^t {}^{(\mu+2)}w(t)\, dt^{\mu+2} \int_0^x e^{-\frac{t}{y}} \frac{dy}{y^2} = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} dt \cdot \frac{1}{t} \int_0^t {}^{(\mu+2)}w(t)\, dt^{\mu+2}.$$

Unter Benutzung der Bezeichnung

$$W^{(\mu)}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t {}^{(\mu+2)}w(t)\, dt^{\mu+2}$$

ist

$$\int_0^\infty y^\mu \varphi(y)\, dy = \int_0^\infty W^{(\mu)}(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt.$$

Ferner ist

$$x^\lambda \int_0^\infty y^\mu \varphi(y)\, dy = x^\lambda \int_0^\infty W^{(\mu)}(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt = \int_0^\infty \int_0^t {}^{(\lambda)}W^{(\mu)}(t)\, dt^\lambda \cdot e^{-\frac{t}{x}} dt$$

unter der Voraussetzung

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t {}^{(\lambda')}W^{(\mu)}(t)\, dt^{\lambda'} = 0; \qquad (\lambda'=1, 2, \ldots \lambda)$$

dabei hat man

$$\int_0^t {}^{(\lambda)}W^{(\mu)}(t)\, dt^\lambda = \int_0^t {}^{(\lambda)}dt^\lambda \cdot \frac{1}{t} \int_0^t {}^{(\mu+2)}w(t)\, dt^{\mu+2}.$$

Schließlich ist für $\omega - \frac{\pi}{2} < \arg x < \omega + \frac{\pi}{2}$

$$x^\lambda = \frac{1}{(\lambda-1)!} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-\frac{t}{x}} dt. \qquad (\lambda=1, 2, \ldots)$$

Das *Laplace*sche Integral

$$\varphi(x) = \int_0^\infty w(t)\, e^{-\frac{t}{x}} dt$$

genügt der Integralgleichung (J.), wenn $w(t)$ der folgenden Integralgleichung genügt:

$$(\mathrm{K.}) \qquad (1+t)w(t) = a\int_0^t w(t)\,dt + \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\int_0^{t^{(\lambda)}} dt^{\lambda}\cdot\frac{1}{t}\int_0^{t^{(\mu+2)}} w(t)\,dt^{\mu+2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Es ist

$$W^{(\mu)}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\mu+1}}{(\mu+1)!}\,w(\tau)\,d\tau$$

und für $\lambda \geqq 1$

$$\int_0^{t^{(\lambda)}} dt^{\lambda}\,W^{(\mu)}(t) = \int_0^t \frac{(t-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\,W^{(\mu)}(z)\,dz = \int_0^t \frac{(t-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\,dz\cdot\frac{1}{z}\int_0^z \frac{(z-\tau)^{\mu+1}}{(\mu-1)!}\,w(\tau)\,d\tau.$$

Man kann demnach der Integralgleichung (K.) die Form geben:

$$(1+t)w(t) = a\int_0^t w(\tau)\,d\tau + \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{A_{0\mu}}{(\mu+1)!}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t w(\tau)\cdot(t-\tau)^{\mu+1}\,d\tau + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{A_{\lambda\mu}}{(\lambda-1)!\,(\mu+1)!}\int_0^t \frac{(t-z)^{\lambda-1}}{z}\,dz\int_0^z w(\tau)\cdot(z-\tau)^{\mu+1}\,d\tau + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{B_\lambda\,t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Wenn die Integralgleichung (J.) durch die Potenzreihe

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

formal befriedigt wird, wird die Integralgleichung (K.) durch die Reihe

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

befriedigt.

Denn die Einsetzung der Reihe für $\varphi(x)$ in die Gleichung (J.) ergibt die Rekursionsformel

$$C_n = (a-n+1)C_{n-1} + \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\,\frac{C_{n-\lambda-\mu-1}}{n-\lambda} + B_n;$$

hierin ist $C_{n-\lambda-\mu-1}$ durch 0 zu ersetzen, wenn $n-\lambda-\mu-1 \leqq 0$ ist, so daß ein verschwindender Nenner $n-\lambda$ nicht auftreten kann. Dieselbe Rekursionsformel erhält man, wenn man die Reihe für $w(t)$ in die Gleichung (K.) einsetzt.

§ 5.

Die Veränderliche t werde entweder auf den Kreis

$$|t| \leqq 1-\varepsilon \qquad (0<\varepsilon<1)$$

oder auf den Sektor

$$|\arg t| \leqq \pi-\theta \qquad (0<\theta<\pi)$$

beschränkt. Dann ist, wenn N die größere der beiden Zahlen ε und $\sin\theta$ ist,

$$|1+t| \geqq N.$$

Wenn die Potenzreihe $F(x,y)$ für $|x| = \frac{1}{\varrho}$, $|y| = \frac{1}{\varrho}$ und die Potenzreihe $G(x)$ für $|x| = \frac{1}{\varrho}$ konvergiert, so ist eine positive Größe G so vorhanden, daß

$$|A_{\lambda\mu}|\varrho^{\lambda+\mu} \leqq G, \quad |B_\lambda|\varrho^\lambda \leqq G$$

ist. Die reellen positiven Größen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{B}_\lambda$, $\mathfrak{G}$ seien so gewählt, daß

$$\frac{|a|}{N} \leqq \mathfrak{a}, \quad \frac{|A_{\lambda\mu}|}{N} \leqq \mathfrak{A}_{\lambda\mu}, \quad \frac{|B_\lambda|}{N} \leqq \mathfrak{B}_\lambda, \quad \mathfrak{A}_{\lambda\mu}\varrho^{\lambda+\mu} \leqq \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{B}_\lambda\varrho^\lambda \leqq \mathfrak{G}$$

ist.

Wir definieren eine Funktion $\mathfrak{w}(t)$ der reellen positiven Veränderlichen t durch die Integralgleichung

$$(\mathfrak{K}.)\quad \mathfrak{w}(t) = \mathfrak{a}\int_0^t \mathfrak{w}(t)\,dt + \sum_{\lambda\mu}\mathfrak{A}_{\lambda\mu}\int_0^{t^{(\lambda)}} dt^\lambda \cdot \frac{1}{t}\int_0^{t^{(\mu+2)}} \mathfrak{w}(t)\,dt^{\mu+2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{B}_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

welche durch die *Laplace*sche Transformation

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \int_0^t \mathfrak{w}(t)\,e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}}\,dt$$

aus der Integralgleichung

$$(1-\mathfrak{a}\mathfrak{x})\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \int_0^{\mathfrak{x}} \sum_{\lambda\mu}\mathfrak{A}_{\lambda\mu}\mathfrak{x}^\lambda\mathfrak{y}^\mu \cdot \mathfrak{f}(\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{x}^\lambda$$

hervorgeht. Die letztere Integralgleichung

$$(\mathfrak{J}.)\qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \int_0^{\mathfrak{x}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mathfrak{A}_{\lambda\mu}\mathfrak{x}^\lambda}{1-\mathfrak{a}\mathfrak{x}}\mathfrak{y}^\mu \cdot \mathfrak{f}(\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y} + \frac{\sum_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{x}^\lambda}{1-\mathfrak{a}\mathfrak{x}}$$

wird durch eine für hinreichend kleine Werte von $|\mathfrak{x}|$ konvergente Potenzreihe

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{C}_n\mathfrak{x}^n$$

mit positiven Koeffizienten $\mathfrak{C}_n$*), die Integralgleichung ($\mathfrak{K}.$) durch die beständig konvergente Potenzreihe

$$\mathfrak{w}(t) = \sum_{u=1}^{\infty}\mathfrak{C}_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

---

*) Da der Kern der Integralgleichung ($\mathfrak{J}.$) in der Umgebung von $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=0$, das letzte Glied in der Umgebung von $\mathfrak{x}=0$ regulär ist, so ist die Lösung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ in der Umgebung von $\mathfrak{x}=0$ regulär (vgl. *Lalesco*, Journ. de Math. 1908, S. 132 ff.).

befriedigt. Es ist

$$\mathfrak{C}_n \leqq \mathfrak{C}\sigma^n \ (n=1, 2, \ldots), \quad \mathfrak{w}(t) \leqq K e^{\sigma t}.$$

Die durch Multiplikation von $\mathfrak{a}$ mit α und von $\mathfrak{A}_{\lambda\mu}$ mit $\alpha^{\mu+2}$ abgeänderte Integralgleichung (𝔎.) wird durch eine Potenzreihe von α

$$\mathfrak{w}(t) = \mathfrak{w}_0(t) + \alpha \mathfrak{w}_1(t) + \alpha^2 \mathfrak{w}_2(t) + \cdots$$

befriedigt; aus den Gleichungen

$$\mathfrak{w}_0(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \mathfrak{B}_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, \quad \mathfrak{w}_1(t) = \mathfrak{a} \int_0^t \mathfrak{w}_0(t)\, dt,$$

$$\mathfrak{w}_2(t) = \mathfrak{a} \int_0^t \mathfrak{w}_1(t)\, dt + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{\lambda 0} \int_0^{t^{(\lambda)}} dt^\lambda \cdot \frac{1}{t} \int_0^{t^{(2)}} \mathfrak{w}_0(t)\, dt^2,$$

. . . . . .

ergeben sich $\mathfrak{w}_0(t)$, $\mathfrak{w}_1(t)$, $\mathfrak{w}_2(t)$, ... als beständig konvergente Potenzreihen von t mit positiven Koeffizienten.

Die durch Abänderung von (K.) erhaltene Gleichung

$$(1+t)\, w(t) = \alpha a \int_0^t w(t)\, dt + \sum_{\lambda\mu} \alpha^{\mu+2} A_{\lambda\mu} \int_0^{t^{(\lambda)}} dt^\lambda \cdot \frac{1}{t} \int_0^{t^{(\mu+2)}} w(t)\, dt^{\mu+2} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} B_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

wird durch die Reihe

$$w(t) = w_0(t) + \alpha w_1(t) + \alpha^2 w_2(t) + \cdots$$

befriedigt; es ist

$$(1+t)\, w_0(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

$$(1+t)\, w_1(t) = a \int_0^t w_0(t)\, dt,$$

$$(1+t)\, w_2(t) = a \int_0^t w_1(t)\, dt + \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{\lambda 0} \int_0^{t^{(\lambda)}} dt^\lambda \cdot \frac{1}{t} \int_0^{t^{(2)}} w_0(t)\, dt^2,$$

. . . . . .

Wenn t dem Kreise $|t| \leqq 1-\varepsilon$ oder dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ angehört, so ist

$$\left|\frac{a}{1+t}\right| \leqq \mathfrak{a}, \quad \left|\frac{A_{\lambda\mu}}{1+t}\right| \leqq \mathfrak{A}_{\lambda\mu}, \quad \left|\frac{B_\lambda}{1+t}\right| \leqq \mathfrak{B}_\lambda.$$

Durch Vergleichung der Formeln für $w_\nu(t)$ und $\mathfrak{w}_\nu(t)$ ergibt sich, wenn $t = |t|$ gesetzt wird,

$$|w_\nu(t)| \leqq \mathfrak{w}_\nu(t). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Daher ist die der Integralgleichung (K.) genügende Reihe

$$w(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(t)$$

sowohl in dem Kreise $|t| \leqq 1 - \varepsilon$ als auch in jedem im Endlichen liegenden Teil des Sektors $|\arg t| \leqq \pi - \theta$ absolut und gleichmäßig konvergent. Da ε beliebig klein ist und die Funktionen $w_\nu(t)$ für $|t| < 1$ regulär sind, so läßt sich $w(t)$ in eine für $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entwickeln, deren Koeffizienten sich aus der oben aufgestellten Rekursionsformel (§ 4) ergeben.

Wie in Bd. 144 dieses Journals, S. 178 ergibt sich, daß

$$|C_n| < A\, n!\ (1+\delta)^n$$

ist, wo δ eine beliebig kleine positive Größe und A eine endliche positive Größe ist. Wie dort erkennt man, daß in dem Sektor $|\arg t| \leqq \pi - \theta$

$$|w(t)| \leqq K e^{\sigma|t|}$$

ist.

§ 6.

Das über die Gerade $\arg t = \omega$ $(|\omega| \leqq \pi - \theta)$ erstreckte Integral

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-\frac{t}{x}} dt$$

ist in dem Kreise

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$$

konvergent und stellt eine Lösung der Integralgleichung (J.) dar, da die in § 4 vorausgesetzten Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Wenn nämlich $\arg t = \omega$ ist, so ist wegen $|w(t)| \leqq K e^{\sigma|t|}$

$$\left|\int_0^t w(t)dt\right| \leqq \int_0^{|t|} K e^{\sigma|t|} d|t| = \frac{K}{\sigma}(e^{\sigma|t|} - 1) < \frac{K}{\sigma} e^{\sigma|t|},$$

$$\left|\int_0^t {}^{(\mu)}w(t)\, dt^\mu\right| < \frac{K}{\sigma^\mu} e^{\sigma|t|},$$

$$\left|e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t {}^{(\mu)}w^\mu(t)\, dt^\mu\right| < \frac{K}{\sigma^\mu} e^{|t|\left(\sigma - \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)},$$

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}} \int_0^t {}^{(\mu)}w(t)\, dt^\mu = 0 \quad \text{für} \quad \Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma.$$

Ferner ist

$$\left|e^{-\frac{t}{x}}\right| = e^{-|t|\,\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)} < e^{-\sigma|t|}, \quad \lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}} = 0.$$

Aus

$$\left|\int_0^{t_{(\mu+1)}} w(t)\,dt^{\mu+1}\right| < \frac{K}{\sigma^{\mu+1}}\,e^{\sigma|t|}$$

folgt

$$|W^{(\mu)}(t)| < \frac{K}{\sigma^{\mu+2}}\,\frac{e^{\sigma|t|}-1}{|t|};$$

wenn $q>0$ eine feste Zahl bedeutet, ist für $|t|>q$

$$\left|\int_0^t W^{(\mu)}(t)\,dt\right| < \frac{K}{\sigma^{\mu+2}}\int_0^q \frac{e^{\sigma|t|}-1}{|t|}\,d|t| + \frac{K}{\sigma^{\mu+2}}\cdot\frac{1}{q}\int_q^{|t|} e^{\sigma|t|}\,d|t|$$

$$= Q + \frac{K}{\sigma^{\mu+2}}\cdot\frac{1}{q}\,\frac{e^{\sigma|t|}-e^{\sigma q}}{\sigma} < Q + \frac{Ke^{\sigma|t|}}{q\sigma^{\mu+3}};$$

durch $(\lambda-1)$-malige Integration folgt aus der letzten Ungleichung

$$\left|\int_0^{t_{(\lambda)}} W^{(\mu)}(t)\,dt^{\lambda}\right| < \frac{Q|t|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} + \frac{Ke^{\sigma|t|}}{q\sigma^{\lambda+\mu+2}};$$

demnach ist

$$\left|e^{-\frac{t}{x}}\int_0^{t_{(\lambda)}} W^{(\mu)}(t)\,dt^{\lambda}\right| < \frac{Q|t|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\,e^{-\sigma|t|} + \frac{K}{q\sigma^{\lambda+\mu+2}}\,e^{|t|\left(\sigma-\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)},$$

$$\lim_{t=\infty} e^{-\frac{t}{x}}\int_0^{t_{(\lambda)}} W^{(\mu)}(t)\,dt^{\lambda} = 0.$$

Als Ergebnis von §§ 4—6 haben wir den Satz:

Die aus einer singulären Volterraschen Integralgleichung abgeleitete lineare Integralgleichung

$$\text{(J.)}\qquad x^2\frac{d\varphi(x)}{dx} + (1-ax)\varphi(x) = \int_0^x F(x,y)\,\varphi(y)\,dy + G(x),$$

wo

$$F(x,y) = \sum A_{\lambda\mu}x^{\lambda}y^{\mu} \qquad (\lambda,\mu = 0,1,2,\ldots)$$

in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ *und*

$$G(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} B_{\lambda}x^{\lambda}$$

in der Umgebung von $x=0$ *regulär ist, wird durch eine für* $\varphi(x)$ *eingesetzte (im allgemeinen divergente) Potenzreihe*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

formal befriedigt. Die Gleichung (J.) *hat als Laplacesche Transformierte die Integralgleichung*

$$(\mathrm{K.})\quad (1+t)w(t) = a\int_0^t w(t)\,dt + \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}\int_0^t {}^{(\lambda)}dt^{\lambda}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t {}^{(\mu+2)}w(t)\,dt^{\mu+2}$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\infty} B_\lambda \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Die Integralgleichung (K.) *besitzt eine Lösung* $w(t)$*, welche sich in die für* $|t|<1$ *konvergente Reihe*

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

entwickeln läßt und auch für $-\pi < \arg t < \pi$ *regulär ist. In dem Sektor*

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0<\theta<\pi)$$

ist

$$|w(t)| \leqq K e^{\sigma|t|},$$

wo K *und* σ *von* t *unabhängige positive Größen sind. Das Laplacesche Integral*

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} w(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

welches über die Gerade $\arg t = \omega$ $(|\omega| \leqq \pi - \theta)$ *erstreckt wird, konvergiert in dem Kreise*

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \sigma$$

und genügt der Integralgleichung (J.). *Dieses Integral kann als Summe der Reihe* S *aufgefaßt werden.*

Die *Gauss*'sche Theorie der geodätischen Linie übertragen auf das *Mayer*sche Problem der Variationsrechnung.

Von Herrn *Adolf Kneser* in Breslau.

I.

Es seien drei Größen x, y, z durch eine Gleichung von der Form

$$dz = F(x, y, z, dx, dy) \tag{1.}$$

miteinander verbunden, in der die Funktion F bezüglich der letzten beiden Argumente homogen und von erster Dimension sei. Ist dann die Größe y als Funktion von x so zu bestimmen, daß der an irgend einer Stelle erhaltene Wert der durch die Gleichung (1.) und eine passende Anfangsbedingung bestimmten Größe z ein Extremum wird, so hat man ein *Mayer*sches Problem der Variationsrechnung. Das älteste dieser Art ist die von *Euler* erfolgreich behandelte Aufgabe der größten Endgeschwindigkeit eines auf vorgeschriebener Bahn fallenden schweren Punktes bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Sind x, y rechtwinklige Koordinaten in einer vertikalen Ebene, ist ferner die Masse des Punktes die Einheit, g die Konstante der Schwere, die in der Richtung der x-Achse wirke, z die lebendige Kraft des Punktes, $f(z)$ der Luftwiderstand, so gibt die Gleichung der lebendigen Kraft in differentieller Form die folgende Beziehung:

$$dz = g\,dx - f(z)\sqrt{dx^2 + dy^2}; \tag{2.}$$

gefordert wird, zwei Punkte 0 und 1 in der xy-Ebene durch eine solche Kurve zu verbinden, daß der schwere Punkt, aus der Ruhelage 0 losge-

lassen, in der Lage 1 mit größtmöglicher Endgeschwindigkeit oder lebendiger Kraft ankommt.

Die Variationsrechnung gibt zur Behandlung solcher Aufgaben die folgende Regel. Man setze

$$\Omega = \lambda(dz - F(x, y, z, dx, dy))$$

und bestimme den Zusammenhang der Größen x, y, z, λ neben der Gleichung (1.) durch die Differentialgleichungen

$$(3.) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} - d\frac{\partial \Omega}{\partial dx} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} - d\frac{\partial \Omega}{\partial dy} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} - d\frac{\partial \Omega}{\partial dz} = 0,$$

deren letzte offenbar ergibt

$$(4.) \qquad -d\lambda - \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Die auf diese Weise im Gebiet der drei Größen x, y, z bestimmten einfachen Mannigfaltigkeiten heißen die Extremalen. Sie sind Raumkurven, wenn wir z als dritte rechtwinklige Koordinate im Raume deuten; ihre Projektionen auf die xy-Ebene nennen wir ebene Extremalen im Gegensatz zu den eigentlichen, räumlichen.

Eine Schar von Extremalen sei gegeben durch die Gleichungen

$$(5.) \qquad x = \xi(t, a), \quad y = \eta(t, a), \quad z = \zeta(t, a),$$

in denen längs jeder einzelnen Extremale a konstant sei, t sich ändere; setzt man dann

$$\xi_t = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \xi_a = \frac{\partial \xi}{\partial a}, \quad \eta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

u. s. f., so ist in den Gleichungen (3.)

$$dx = \xi_t dt, \quad dy = \eta_t dt, \quad dz = \zeta_t dt,$$

abstrakter allgemein

$$(6.) \qquad d = dt\frac{\partial}{\partial t}$$

zu setzen; ebenso in der Gleichung (4.), die λ bis auf einen von t unabhängigen Faktor als Funktion von t und a bestimmt. Die symbolische Gleichung (6.) ergibt nun weiter

$$\frac{\partial d}{\partial a} = d\frac{\partial}{\partial a} = dt\frac{\partial^2}{\partial a \partial t}, \quad \frac{\partial dx}{\partial a} = d\frac{\partial x}{\partial a} = d\xi_a, \ldots;$$

denkt man sich also die Werte (5.) in die Gleichung $\Omega = 0$ eingesetzt und differenziert nach a, so folgt

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\xi_a + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\eta_a + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\zeta_a + \frac{\partial \Omega}{\partial dx}d\xi_a + \frac{\partial \Omega}{\partial dy}d\eta_a + \frac{\partial \Omega}{\partial dz}\zeta_a$$

oder

$$0 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} - d\,\frac{\partial \Omega}{\partial dx}\right)\xi_a + d\left(\xi_a \frac{\partial \Omega}{\partial dx}\right) + \cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder aus den hingeschriebenen entstehen, indem man x und ξ durch y und η oder z und ζ ersetzt. Somit ergibt sich auf grund der Gleichungen (3.)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\xi_a \frac{\partial \Omega}{\partial dx} + \eta_a \frac{\partial \Omega}{\partial dy} + \zeta_a \frac{\partial \Omega}{\partial dz}\right\} = 0. \tag{7.}$$

Da ferner Ω bezüglich der Differentiale homogen und von erster Dimension ist, gilt die Identität

$$\Omega = dx \frac{\partial \Omega}{\partial dx} + dy \frac{\partial \Omega}{\partial dy} + dz \frac{\partial \Omega}{\partial dz} = 0$$

oder

$$\xi_t \frac{\partial \Omega}{\partial dx} + \eta_t \frac{\partial \Omega}{\partial dy} + \zeta_t \frac{\partial \Omega}{\partial dz} = 0. \tag{8.}$$

Wenn daher an einer Stelle einer Extremale der Schar (5.) die Gleichung

$$\xi_a \frac{\partial \Omega}{\partial dx} + \eta_a \frac{\partial \Omega}{\partial dy} + \zeta_a \frac{\partial \Omega}{\partial dz} = 0 \tag{9.}$$

gilt, so gilt sie längs der ganzen Extremale und gibt verbunden mit der Gleichung (8.) längs der ganzen Extremale die Folgerung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial dx}\delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial dy}\delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial dz}\delta z = 0, \tag{10.}$$

wobei

$$\delta x = \xi_t dt + \xi_a da,\ \delta y = \eta_t dt + \eta_a da,\ \delta z = \zeta_t dt + \zeta_a da \tag{11.}$$

gesetzt ist und dt und da unabhängige Differentiale bedeuten.

Gilt ferner die Gleichung (9.) für je einen Punkt jeder der Extremalen (5.), etwa immer für den durch eine Gleichung

$$t = \tau(a) \tag{12.}$$

bestimmten Wert von t, so gilt sie in der ganzen Schar jener Extremalen bei beliebigen Werten von t und a, weil sie nach (7.) längs jeder einzelnen dieser Kurven gilt. In diesem Falle nennen wir die Schar (5.) ein Feld.

Man kann das erhaltene Resultat etwas anders aussprechen. Gilt die Gleichung (10.) bei den Annahmen (11.) und (12.), so gilt sie in der Kurvenschar überall; denn aus ihr folgt wegen der stets geltenden Glei-

chung (8.) immer auch die Beziehung (7.) bei der Annahme (12.), womit die Kurvenschar (5.) als Feld erkannt ist.

II.

Felder kann man auf mannigfaltige Weise herstellen, wenn man die Gesamtheit der Extremalen beherrscht. Sei z. B. $\mathfrak{K}$ eine beliebige Kurve in der xy-Ebene; setzen wir auf ihr für z bestimmte Werte, so ist längs jeder von $\mathfrak{K}$ ausgehenden Kurve die Größe z entsprechend der Differentialgleichung

$$dz - F(x, y, z, dx, dy) = 0$$

oder

$$\frac{dz}{dx} - F\left(x, y, z, 1, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

eindeutig bestimmt. Speziell setzen wir $z = \text{const.}$ längs der Kurve $\mathfrak{K}$ und lassen von dieser ebene Extremalen ausstrahlen; bezeichnet man durch δ den Fortgang längs der Kurve $\mathfrak{K}$, so ist $\delta z = 0$ und die Gleichung (10.) erfüllt, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial dx}\delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial dy}\delta y = 0$$

oder auch

$$\frac{\partial F}{\partial dx}\delta x + \frac{\partial F}{\partial dy}\delta y = 0 \tag{13.}$$

gilt. Das ist eine Beziehung zwischen den auf die ausstrahlende Extremale bezüglichen Differentialen d und der Richtung der Kurve $\mathfrak{K}$; ist sie erfüllt, so sagen wir, die Extremalenschar liege transversal zur Kurve $\mathfrak{K}$. Sie bildet dann offenbar ein Feld, da die charakteristische Gleichung (10.) für eine bestimmte einfache Mannigfaltigkeit von Punkten erfüllt ist, die man durch eine Gleichung (12.) ausdrücken könnte, in der a ein längs der Kurve $\mathfrak{K}$ veränderlicher Parameter wäre. Die Gleichung (10.) gilt daher allgemein und führt, wenn man in ihr $\delta z = 0$ setzt, sofort zu der wichtigen Folgerung,

> daß die ebenen Extremalen des konstruierten Feldes zu allen Linien $z = \text{const.}$ transversale Lage haben.

Bei der *Euler*schen Aufgabe (2.) findet man

$$\frac{\partial F}{\partial dx} = g - f(z)\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial dy} = -f(z)\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}};$$

die Transversalitätsbedingung (13.) wird also

$$g\delta x = f(z)\,\frac{dx\delta x + dy\delta y}{\sqrt{dx^2+dy^2}} \tag{14.}$$

und läßt sich folgendermaßen deuten. Längs einer Kurve, auf der $z=\text{const.}$, steht der Kosinus des Neigungswinkels gegen die Vertikale zum Kosinus des Winkels zwischen der Kurve und der transversal schneidenden Extremale in konstantem Verhältnis. Da nach dem Sinn der Aufgabe $f(0)=0$ zu setzen ist, werden wir z längs der Kurve $\mathfrak{K}$ einer von Null verschiedenen Konstanten z_0 gleichsetzen. Lassen wir dann von $\mathfrak{K}$ eine Schar von Extremalen gemäß der Gleichung (14.) ausstrahlen und lassen wir auf jeder von ihnen den schweren Punkt fallen, indem wir ihm auf der Kurve $\mathfrak{K}$ jedesmal die lebendige Kraft z_0 geben, so haben die Kurven, auf denen irgend ein konstanter Wert der lebendigen Kraft erzielt wird, zu den Bahnkurven die angegebene Lagenbeziehung. — Identisch erfüllt man die Bedingung (14.), wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ in einen Punkt degeneriert, in dem dann auch $z_0=0$ gesetzt werden kann.

Kehren wir wieder zur allgemeinen Aufgabe zurück und nehmen wir an, daß die von der Kurve $\mathfrak{K}$ transversal ausstrahlenden Extremalen ein Stück der Ebene einfach bedecken und daß in diesem die Größe z den Sinn ihrer Änderung längs einer der Extremalen beibehält. Alsdann können wir zwei neue krummlinige Koordinaten u, v auf folgende Weise definieren. Sei v längs jeder Extremale konstant, von einer zur andern veränderlich; u sei der Wert der Größe z, den sie nach der oben angegebenen genaueren Bestimmung in jedem Punkte einer Extremale annimmt. Die ausgesprochene Voraussetzung bringt es mit sich, daß man auf dem betrachteten Stück der Ebene x und y eindeutig durch u und v ausgedrückt denken kann; die Gleichung

$$dz - F(x, y, z, dx, dy) = 0$$

geht dann über etwa in die Form

$$dz - G(u, v, z, du, dv) = 0. \tag{15.}$$

Da die Variable z von dieser Transformation nicht berührt wird, folgt

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial z}$$

und die Gleichung (4.), die den Multiplikator bestimmt, bleibt dieselbe; der Multiplikator λ bleibt also auch derselbe bis auf einen konstanten Faktor, der so wie so willkürlich bleibt.

Längs einer Extremale der Schar ist nun $dv = 0$ und u die längs ihrer gebildete Größe z; die Gleichung (15.) ergibt also

$$du = G(u, v, u, du, 0)$$

oder, wenn

$$\frac{dv}{du} = s, \quad G(u, v, z, du, dv) = g(u, v, z, s)\, du$$

gesetzt wird,

$$g(u, v, u, 0) = 1. \tag{16.}$$

Man hat ferner offenbar die Gleichungen

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v,$$

$$F = G, \quad \frac{\partial G}{\partial du} = \frac{\partial F}{\partial dx}\frac{\partial dx}{\partial du} + \frac{\partial F}{\partial dy}\frac{\partial dy}{\partial du},$$

$$\frac{\partial G}{\partial dv} = \frac{\partial F}{\partial dx}\frac{\partial dx}{\partial dv} + \frac{\partial F}{\partial dy}\frac{\partial dy}{\partial dv},$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$\frac{\partial dx}{\partial du} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial dx}{\partial dv} = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial dy}{\partial du} = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial dy}{\partial dv} = \frac{\partial y}{\partial v}; \tag{17.}$$

also folgt

$$\frac{\partial G}{\partial du}\delta u + \frac{\partial G}{\partial dv}\delta v = \frac{\partial F}{\partial dx}\delta x + \frac{\partial F}{\partial dy}\delta y.$$

Nun ist die Transversalitätsbedingung erfüllt, wenn $\delta u = 0$ und die Differentiale d sich auf die Extremalen des Feldes beziehen, so daß $dv = 0$, $z = u$; die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet dann, mithin auch die linke bei beliebigem δv, und man erhält

$$\left.\frac{\partial G}{\partial dv}\right|^{dv=0,\, z=u} = 0; \tag{18.}$$

da offenbar, wenn man die partiellen Ableitungen durch entsprechende Suffixe bezeichnet,

$$\frac{\partial G(u, v, u, du, dv)}{\partial dv} = \frac{\partial g(u, v, u, s)}{\partial s} = g_s(u, v, u, s)$$

gesetzt werden muß, so kann man für die Gleichung (18.) auch schreiben

$$g_s(u, v, u, 0) = 0. \tag{19.}$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit der Gleichung (16.) die *Maclaurin*sche Entwicklung

$$g(u, v, u, s) = 1 + \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, u, \theta s),$$

in der θ der Strecke von 0 bis 1 angehört; die allgemeine Definitionsgleichung der Größe z wird demnach

$$\frac{dz}{du} = 1 + \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, u, \theta s) + (z-u) M, \tag{20.}$$

wobei M einen Mittelwert von $g_z(u, v, z, s)$ bezüglich des Arguments z bedeutet, genauer

$$M = g_z(u, v, u + \theta_1 (z-u), s) = \frac{g(u, v, z, s) - g(u, v, u, s)}{z-u},$$

und θ_1 liegt auf derselben Strecke wie θ.

In dieser Formel liegt eine Verallgemeinerung der Gestalt, in welche *Gauss* das Linienelement einer beliebigen Fläche gebracht hat, um die Theorie der geodätischen Linie zu entwickeln:

$$dz = \sqrt{du^2 + m^2 dv^2}, \quad \frac{dz}{du} = \sqrt{1 + m^2 s^2}; \tag{21.}$$

denn auch hier bestehen offenbar die Gleichungen (16.), (19.) und (20.) mit dem Wert $M = 0$. Die *Gauss*'sche Theorie habe ich in § 16 meines Lehrbuchs der Variationsrechnung auf das einfachste *Lagrange*sche Problem ausgedehnt, bei dem man das Extremum der Größe

$$z = \int F(x, y, dx, dy)$$

sucht; die soeben durchgeführten Rechnungen finden sich dort teilweise schon vor. Wenn es aber jetzt gelungen ist, auch für das *Mayer*sche Problem ähnliche Entwicklungen durchzuführen, so beruht dies wesentlich auf dem oben eingeführten Begriff des Feldes bei dieser Art von Aufgaben.

III.

Wie das *Gauss*'sche Linienelement (21.) ersichtlich macht, daß sich bei der Annahme $dv = 0$ der kleinste Wert von z, also die kürzeste Linie ergibt, so macht die Gleichung (20.) das Extremum im Innern des Feldes in höherem Maße ersichtlich als die Methode von *Weierstraß* in ihrer bisherigen dem *Mayer*schen Problem angepaßten Gestalt.

In der Tat sei 0 ein Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$, 01 ein in ihm beginnender Bogen einer Extremale des Feldes, 2 ein anderer Punkt der Kurve $\mathfrak{K}$, der mit 1 durch eine beliebige im Felde verlaufende Kurve $\mathfrak{L}$ verbunden sei, so daß längs ihrer die Variablen u, v und die Gleichung (20.) benutzt werden können. Dann lasse man die Größe z auf der

Kurve $\mathfrak{k}$ mit demselben Anfangswert z_0 beginnen wie die Extremalen, so daß die Differenz $z-u$ mit dem Werte Null beginnt:

$$(z-u)\big|^2 = 0.$$

Jetzt schreibe man die Gleichung (20.) in der Form

$$\left[\frac{d(z-u)}{du} - M(z-u)\right] e^{-\int M du} = \frac{s^2}{2} e^{-\int M du} g_{ss}(u, v, u, \theta s)$$

oder

$$\frac{d}{du}\left[(z-u)\, e^{-\int M du}\right] = e^{-\int M du} \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, u, \theta s);$$

wenn dann zunächst u längs der Kurve $\mathfrak{k}$ beständig wächst, so hat die eingeklammerte Größe auf der linken Seite, mithin auch $z-u$, da sie im Anfangspunkte 2 mit dem Werte Null beginnt, dasselbe Vorzeichen wie die Größe $g_{ss}(u, v, u, \theta s)$. Kann man eine allgemeine Art von Kurven $\mathfrak{k}$ angeben, für die diese Größe, in der s sich auf $\mathfrak{k}$ bezieht, ein festes Vorzeichen behält, so gibt die Extremale 01 gegenüber allen diesen Kurven $\mathfrak{k}$ ein Extremum fester Art, entweder immer ein Maximum, oder immer ein Minimum der Größe z, die auf der Kurve $\mathfrak{K}$ mit dem Anfangswert z_0 beginnt.

Aber auch wenn u nicht längs der Kurve $\mathfrak{k}$ beständig wächst, kann man einen ähnlichen Schluß ziehen. Sei dann τ ein längs der Kurve $\mathfrak{k}$ von 2 nach 1 hin wachsender Parameter, als dessen eindeutige Funktionen die Größen u, v, s, M angesehen werden können; die Gleichung (20.) werde in der Form

$$\left[\frac{d(z-u)}{d\tau} - M(z-u)\frac{du}{d\tau}\right] e^{-\int M \frac{du}{d\tau} d\tau} = \frac{s^2}{2} e^{-\int M \frac{du}{d\tau} d\tau} g_{ss}(u, v, u, \theta s)$$

oder

$$\frac{d}{d\tau}\left[(z-u)\, e^{-\int M \frac{du}{d\tau} d\tau}\right] = e^{-\int M \frac{du}{d\tau} d\tau} \frac{s^2}{2} g_{ss}(u, v, u, \theta s) \frac{du}{d\tau}$$

geschrieben, und zeigt, wenn man τ von dem Werte τ_2 ab wachsen läßt, der zum Punkte 2 gehört, daß die Größe $z-u$ längs der Kurve $\mathfrak{k}$, mithin auch in ihrem Endpunkte 1 ein festes Vorzeichen besitzt, wenn dies für die Größe

$$(22.) \qquad g_{ss}(u, v, u, \theta s)\, du$$

gilt, in der sich das Differential du auf den Fortgang längs der Kurve $\mathfrak{k}$ in der Richtung 21 bezieht. Das stimmt mit dem früheren besonderen Resultat überein, da dort du von vornherein positiv sein sollte.

Artet die Kurve $\mathfrak{K}$ in einen Punkt, das Feld in einen Büschel von Extremalen aus, so muß auch die Kurve $\mathfrak{L}$ in diesem Punkte mit demselben Anfangswert von z wie die Extremalen beginnen, und die durchgeführten Schlüsse bedürfen keiner Änderung. Im Falle einer nicht entarteten Kurve $\mathfrak{K}$ hat man hinreichende Bedingungen der Extrema für ein *Mayer*sches Problem mit variablem Anfangspunkt erzielt, was bisher noch nicht geschehen sein dürfte.

Die durch das Vorzeichen der Größe (22.) ausgedrückte Extremumsbedingung, die *Legendre*sche nach der jetzt üblichen Bezeichnung, läßt sich leicht so umformen, daß die Variablen u, v nicht erst wirklich eingeführt zu werden brauchen. Aus der Identität

$$G(x, y, z, du, dv) = g(u, v, z, s)\,du$$

schließt man nämlich unmittelbar

$$g_{ss}(u, v, z, s)\,du = \frac{\partial^2 G(x, y, z, du, dv)}{(\partial dv)^2}\,du^2,$$

so daß als maßgebendes Vorzeichen in der *Legendre*schen Bedingung das der Größe

$$\frac{\partial^2 G}{\partial dv^2}$$

genommen werden kann. Nun ist aber

$$G(u, v, z, du, dv) = F(x, y, z, dx, dy);$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (17.)

$$(23.)\qquad \frac{\partial^2 G}{\partial dv^2} = \frac{\partial^2 F}{(\partial dx)^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial dx\,\partial dy}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{(\partial dy)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

und da die Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial dx},\ \frac{\partial F}{\partial dy}$$

in den Differentialen homogen und von der Ordnung Null sind, mithin die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial dx)^2}\,dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,dy}\,dy = 0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial dx\,\partial dy}\,dx + \frac{\partial^2 F}{(\partial dy)^2}\,dy = 0$$

gelten, so gibt es eine Größe $F_1(x, y, z, dx, dy)$ mit den Beziehungen

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial dx)^2} = F_1 dy^2,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial dx\,\partial dy} = -F_1 dx dy,\quad \frac{\partial^2 F}{(\partial dy)^2} = F_1 dx^2,$$

und die Gleichung (23.) gibt

$$\frac{\partial^2 G}{\partial dv^2} = F_1\left(dy\,\frac{\partial x}{\partial v} - dx\,\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2.$$

Als das bei der *Legendre*schen Bedingung maßgebende Vorzeichen kann daher auch dasjenige der Größe $F_1(x, y, u, dx, dy)$ genommen werden, wenn das durch die Differentiale dx, dy bezeichnete Bogenelement in den Variablen u, v durch $du, \theta dv$ bestimmt wird. Diese ganze Betrachtung ist im wesentlichen schon in § 16 meines Lehrbuchs für das einfachste *Lagrange*sche Problem durchgeführt; ebenso sind die dort und in § 17 gemachten Bemerkungen über schwache und starke Extreme auf das *Mayer*sche Problem unmittelbar zu übertragen. Insbesondere gilt auch hier, daß ein starkes Extremum gesichert ist, wenn die Größe F_1 bei beliebiger Wahl von dx und dy ein festes Vorzeichen hat; ein schwaches Extremum liegt schon dann vor, wenn F_1 die bezeichnete Eigenschaft in denjenigen Bogenelementen (dx, dy) besitzt, die von den Elementen des Extremalenbogens 01 hinreichend wenig abweichen.

Bei dem *Euler*schen Problem der größten Endgeschwindigkeit findet man z. B.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial dx^2} = -f(z)\frac{dy^2}{(\sqrt{dx^2+dy^2})^3}, \quad F_1 = \frac{-f(z)}{(\sqrt{dx^2+dy^2})^3},$$

und da $f(z)$ positiv ist, so ist die Bedingung eines starken Maximums erfüllt.

IV.

Wie man die durchgeführte Untersuchung auf das allgemeinste *Mayer*sche Problem ausdehnen kann, möge nur eben angedeutet werden.

Alle Funktionszeichen bedeuten Funktionen, die bezüglich der vorkommenden Differentiale homogen und von erster Dimension sind. Die das Problem bestimmenden Gleichungen seien, indem das Extremum von y_0 gefordert wird,

$$dy_0 - \varphi_0(y_0, y_1, \dots y_n, dy_1, dy_2, \dots dy_n) = 0,$$
$$\varphi_\varrho(y_0, y_1, \dots y_n, dy_1, dy_2, \dots dy_n) = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots r).$$

Man setze

$$\Omega = \lambda_0(dy_0 - \varphi_0) + \sum_{\varrho}^{1,r} \lambda_\varrho \varphi_\varrho = \lambda_0(dy_0 - \Phi(y_0, \dots y_n, dy_1, \dots dy_n)$$

und bezeichne als Feld eine von den $n-1$ Parametern $v_1, \dots v_{n-1}$ abhängende Extremalenschar,

$$(24.) \qquad y_\nu = \theta_\nu(t, v_1, \dots v_{n-1}), \quad (\nu = 0, 1, \dots n)$$

längs deren, wenn

$$\delta = dt\,\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\mu}^{1,n-1} dv_\mu \frac{\partial}{\partial v_\mu}$$

gesetzt wird, überall die Gleichung

$$\sum_{\nu}^{0,n} \frac{\partial \Omega}{\partial dy_\nu}\,\delta y_\nu = 0$$

besteht. Die Extremalen als Kurven im Raume der Größen $y_1, \dots y_n$ werden dann von den Gebieten $y_0 = \text{const.}$ transversal geschnitten, d. h. so, daß die Beziehung

$$\sum_{\tau}^{1,n} \frac{\partial \Omega}{\partial dy_\tau}\,\delta y_\tau = 0$$

oder

$$\sum_{\tau}^{1,n} \frac{\partial \Phi}{\partial dy_\tau}\,\delta y_\tau = 0 \tag{25.}$$

gilt. Jetzt führe man statt der Variablen $y_1, \dots y_n$ allgemein die durch die eine Gleichung (24.) definierte Größe y_0, die wir u nennen, und die Parameter $v_1, v_2, \dots v_{n-1}$ als neue Variable ein; man erhalte so die Identität

$$\Phi(y_0, y_1, \dots y_n, dy_1, dy_2, \dots dy_n) = \Psi(y_0, u, v_1, \dots v_{n-1}, du, dv_1, \dots dv_{n-1}).$$

Die Gleichung (25.) ist dann allgemein

$$\frac{\partial \Psi}{\partial du}\,\delta u + \sum_{\mu}^{1,n-1} \frac{\partial \Psi}{\partial dv_\mu}\,\delta v_\mu = 0. \tag{26.}$$

Da nun die Transversalitätsbedingung bei dem Extremalenfeld (24.), also bei der Annahme $dv_1 = dv_2 = \dots = dv_{n-1} = 0$ erfüllt sein muß, wenn man $\delta u = 0$ setzt, so müssen bei dieser Annahme in der Gleichung (26.) alle Glieder außer dem ersten wegfallen, d. h.

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial dv_\mu}\right)_{dv_1 = \dots = dv_{n-1} = 0} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots n-1). \tag{27.}$$

Da ferner längs der Extremalen (24.) immer u für y_0 gesetzt werden kann, ergibt sich

$$du = \Psi(u, u, v_1, \dots v_{n-1}, du, 0, \dots 0). \tag{28.}$$

Setzt man daher

$$s_\mu = \frac{dv_\mu}{du}, \quad \Psi(y_0, u, v_1, \dots du, dv_1, \dots) = g(y_0, u, v_1, \dots v_{n-1}, s_1, \dots s_{n-1})\,du,$$

$$\frac{\partial g}{\partial s_\mu} = g_\mu(y_0, u, v_1, \dots s_1, \dots s_{n-1}), \quad (\mu = 1, 2, \dots n-1)$$

so besagen die Gleichungen (27.) und (28.), da in ersteren u für y_0 zu setzen ist,

$$\begin{aligned} g_\mu(u, u, v_1, \dots v_{n-1}, 0, \dots 0) &= 0, \\ g(u, u, v_1, \dots v_{n-1}, 0, \dots 0) &= 1. \end{aligned} \tag{29.}$$

Man kann ferner jetzt als allgemeine Definition von y_0 ansetzen

$$(30.)\quad \begin{aligned} dy_0 &= g(y_0, u, v_1, \dots v_{n-1}, s_1, \dots s_{n-1})\,du \\ &= \{g(u, u, v_1, \dots v_{n-1}, s_1, \dots s_{n-1}) + M(y_0 - u)\}\,du, \end{aligned}$$

wobei M ein Mittelwert von $\partial g : \partial y_0$, oder auch einfach der Quotient

$$\frac{g(y_0, u, v_1, \dots v_{n-1}, s_1, \dots s_{n-1}) - g(u, u, v_1, \dots v_{n-1}, s_1, \dots s_{n-1})}{y_0 - u}$$

ist. Die Gleichungen (29.) ergeben aber, indem man die *Maclaurin*sche Entwicklung nach den Größen s_μ ansetzt,

$$g(u, u, v_1, \dots v_{n-1}, s_1, \dots s_{n-1}) = 1 + \tfrac{1}{2} \sum_{\mu,\mu_1}^{1,n-1} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_\mu \partial s_{\mu_1}}\right)_m s_\mu s_{\mu_1},$$

wobei der Index m andeute, daß ein Argumentsystem $u, u, v_1, \dots v_{n-1}, \theta s_1, \theta s_2, \dots \theta s_{n-1}$ zu nehmen ist, in dem θ der Strecke von 0 bis 1 angehört. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (30.), so ergibt sich

$$d(y_0 - u) - M(y_0 - u)\,du = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu,\mu_1}^{1,n-1} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_\mu \partial s_{\mu_1}}\right)_m s_\mu s_{\mu_1} du,$$

$$d\left[e^{-\int M du}(y_0 - u)\right] = \tfrac{1}{2} e^{-\int M du} \sum_{\mu,\mu_1}^{1,n-1} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_\mu \partial s_{\mu_1}}\right)_m s_\mu s_{\mu_1} du,$$

woraus ähnliche Schlüsse gezogen werden können wie oben bei dem speziellen *Mayer*schen Problem. Das Vorzeichen der Doppelsumme kann wieder aus der ursprünglichen Größe Φ bestimmt werden, ohne daß man die Ausdrücke Ψ und g wirklich bildet.

Über einige Kurven- und Flächengleichungen, die mit der Algebra der Thetafunktionen zusammenhängen.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

Es sind Anzeichen vorhanden, daß auch *Riemann* bei seinen Studien über die Theta sich mit Rechnungen beschäftigte, die *Goepel*scher Art sind. Allzuviel Zeit wird *Riemann* ihnen nicht gewidmet haben, denn er hatte andere für ihn fruchtbarere Gedanken zu verfolgen. Daß ich mir solche Probleme stellte, auf Anregung, beinahe im Auftrage von *Weierstraß*, mit dem ich durch die ihm überreichte Dissertation persönlich bekannt geworden war, bedauere ich nicht. Es ist manche Ergänzung notwendig zu dem, was durch *Riemanns* Theorie in großen Zügen gegeben ist, und die Thetafunktionen von wenigen Variabeln stehen noch auf der Tagesordnung.

Bei einigen meiner Arbeiten treten geometrische Dinge in Evidenz, die zum Teil schon vorher bekannt waren. Diese Geometrie ist, verknüpft mit der Idee der Theta von mehreren Veränderlichen, bei mir über verschiedene Arbeiten verstreut. Ich will sie hier zusammenfassen, ohne von den Theta zu sprechen. Allerdings verwende ich elliptische Funktionen, weil dadurch der analytische Ausdruck des Geometrischen besonders klar wird.

I. Es seien sieben Punkte in der Ebene gegeben, in unabhängiger Lage, so daß nicht drei auf einer Geraden, nicht sechs auf einem Kegelschnitt liegen. Die entsprechende Voraussetzung machen wir später stillschweigend bei den andern Problemen. Wir betrachten die ganzen Funktionen dritten Grades der Koordinaten x, y, die in diesen sieben Punkten verschwinden. Es lassen sich drei linear-unabhängige aufstellen: X, Y, Z; die allgemeine ist dann

Johannes Knoblauch †.

Kurze Zeit nach dem Hinscheiden von Georg Hettner ist ihm sein Freund Johannes Knoblauch gefolgt. Auch sein Tod bedeutet für das Crellesche Journal, dessen Redaktionskomitee er dreizehn Jahre angehörte und dessen Ziele er in aufopfernder Arbeit fördern half, einen schweren Verlust.

Seine hohe wissenschaftliche Bildung ermöglichte ihm sich feinsinnig in fremde Gedankengänge einzuleben und ihre wissenschaftliche Bedeutung scharf und klar zu erfassen. Mit dem ihm eigenen strengen Pflichtgefühl nahm er die mannigfache Arbeit für diese Zwecke stets freudig auf sich.

Wir werden sein Andenken in dankbarer Erinnerung halten.

Marburg a. d. L., den 5. November 1915.

Kurt Hensel.

$$U = aX + bY + cZ.$$

Bildet man die Quotienten

$$\frac{X}{Z} = \lambda, \quad \frac{Y}{Z} = \mu,$$

so sind λ, μ rationale Funktionen von x, y. Aber zu einem Wertepaar λ, μ gehören im allgemeinen zwei Wertepaare oder Punkte x, y. Denn hält man λ, μ fest, so sind $X - \lambda Z = 0$, $Y - \mu Z = 0$ die Gleichungen zweier Kurven dritter Ordnung, die sich in neun Punkten schneiden; sieben davon sind die gegebenen festen Grundpunkte. Es sind daher x, y nicht rationale Funktionen von λ, μ, sondern solche von λ, μ, ϱ, wo ϱ die Quadratwurzel aus einem in λ, μ rationalen Ausdruck bedeutet, und es kommt vor allem darauf an, diese Irrationalität zu bestimmen. Zu dem Zweck betrachten wir die ganzen Funktionen sechsten Grades V, die in den sieben Punkten von der zweiten Ordnung verschwinden. Dazu gehören die sechs: $X^2, XY, \ldots Z^2$. Es existieren aber auch andere, die nicht rational in X, Y, Z sind. Eine solche sei V. Dann stellt, wenn F eine homogene quadratische Funktion bedeutet,

$$\alpha V + F(X, Y, Z)$$

die allgemeine V-Funktion dar. Denn der Ausdruck enthält sieben willkürliche Koeffizienten; es ist aber

$$\frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} - 7 \cdot 3 = 7$$

die Anzahl der linear-unabhängigen Funktionen sechsten Grades von x, y, die in sieben Punkten von der zweiten Ordnung verschwinden.

V aber ist mit X, Y, Z durch eine quadratische Gleichung verbunden. Denn man betrachte die ganzen Funktionen zwölften Grades, die in den sieben Punkten von der vierten Ordnung verschwinden. Hier ist die Anzahl der linear-unabhängigen:

$$\frac{13 \cdot 14}{1 \cdot 2} - 7 \cdot \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 21.$$

Zu ihnen gehört einerseits V^2, andrerseits:

$$\alpha_2 V + \alpha_4,$$

wenn α_2 eine homogene Funktion zweiten Grades von X, Y, Z, α_4 eine solche vom vierten Grade bedeutet. Der Ausdruck enthält 21 Koeffizienten, also ist V^2 in der Form $\alpha_2 V + \alpha_4$ darstellbar.

Setzen wir V gleich $\frac{1}{2}\alpha_2 + L$, so ist L eine spezielle V-Funktion, und es ist

$$(L(x, y))^2 = M(X, Y, Z),$$

wo M eine homogene ganze Funktion vierten Grades von X, Y, Z bedeutet. Sie hat willkürliche Koeffizienten, wenn man berücksichtigt, daß die sieben festen Punkte willkürlich sind. Es folgt daher aus dieser einfachen Betrachtung der hübsche Satz, daß die Gleichung $z^2 = M(u, v, w)$, in der M irgend eine homogene Funktion vierten Grades von u, v, w darstellt, rational auflösbar ist — und zwar dadurch, daß man u, v, w gleich oder proportional Funktionen dritten Grades setzt, die in sieben Punkten gemeinsam verschwinden.

Führt man, neben den Quotienten λ, μ, ein:

$$\varrho = \frac{L}{Z^2},$$

so hat man:

$$\varrho^2 = M(\lambda, \mu, 1),$$

und es lassen sich jetzt x, y rational durch λ, μ, ϱ ausdrücken.

Setzt man L gleich 0, so ist zugleich M gleich 0. Die beiden konjugierten Punkte, denen die Werte λ, μ, ϱ und $\lambda, \mu, -\varrho$ entsprechen, fallen dann zusammen.

$M = 0$ ist die Gleichung der allgemeinen Kurve vierter Ordnung; $L = 0$ ist die *Aronhold*sche Kurve. Beide entsprechen sich gegenseitig punktweise eindeutig; denn wenn $M = 0$ ist, werden x, y rational in λ, μ.

Da $L^2 = M(X, Y, Z)$ ist und X, Y, Z in den Grundpunkten verschwinden, so ist L eine Funktion von x, y, die in diesen Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet. — Die allgemeine U-Funktion ist $aX + bY + cZ$, das allgemeine V:

$$V = \alpha L + F(X, Y, Z).$$

Wir können dafür schreiben:

$$U = Z(a\lambda + b\mu + c),$$
$$V = Z^2(\alpha\varrho + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda\mu + \cdots + \varkappa).$$

Es existieren spezielle U- und V-Funktionen. Mit U_a bezeichnen wir dasjenige U, das in einem der sieben Grundpunkte, P_a, von der zweiten Ordnung verschwindet, in den übrigen von der ersten; die Anzahl der Bedingungen ist hier: $3 + 6 = 9$, die der Koeffizienten: 10. Ferner sei $F_{a\beta}$ die lineare

Funktion von x, y, die in zwei Grundpunkten P_α, P_β, und $G_{\alpha\beta}$ die quadratische, die in den fünf übrigen Punkten verschwindet. Wir setzen: $F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}$.

Dies sind 28 besondere U. Zu den V-Funktionen gehört z. B.

$$G_{12} G_{34} G_{56} \text{ und } F_{12} F_{34} F_{56} U_7.$$

Die konstanten Faktoren der hier eingeführten Ausdrücke bestimmen wir in folgender Weise. Wir nehmen auf der Kurve $L = 0$ irgend einen von den Grundpunkten verschiedenen Punkt P_0 willkürlich an; wir wählen ferner X, Y, Z so, daß Y und Z auch in P_0 verschwinden, X aber dort gleich 1 wird. Und nun werde festgesetzt, daß sämtliche Funktionen $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta}$, U_α in P_0 ebenfalls den Wert 1 haben. In den Gleichungen

$$U_m = a_m X + b_m Y + c_m Z \qquad (m = \alpha \text{ und } \alpha\beta)$$

muß dann der Koeffizient a_m gleich 1 sein. Wir haben daher allgemein:

$$U_m = Z(\lambda - \lambda_m),$$

wo λ_m von λ unabhängig und eine lineare Funktion von μ ist. Ferner ist, da P_0 auf der Linie $L = 0$ liegt, $M(X, Y, Z) = 0$ im Punkte P_0, wo $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$ ist. Es ist daher $M(X, Y, Z)$ in bezug auf X nur vom dritten Grade.

Wir nehmen kühn: μ konstant an. Dann wird $M(\lambda, \mu, 1)$ eine ganze Funktion dritten Grades $R(\lambda)$ mit konstanten Koeffizienten, und die Gleichung

$$\varrho^2 = R(\lambda)$$

läßt sich durch elliptische Funktionen auflösen (eigentlich werden hierbei x und y eindeutige Funktionen von zwei Größen, der Variablen v und dem Modul ω).

Es ist aber besser, vom Punkte x, y auszugehen. Indem man μ konstant setzt, wird der Punkt x, y beschränkt auf die Kurve dritter Ordnung $Y - \mu Z = 0$, auf der die sieben Grundpunkte liegen und auch P_0. x, y lassen sich demnach auffassen als elliptische Funktionen dritten Grades einer Größe v; wir dürfen annehmen, daß v in P_0 gleich 0 ist. Die Werte von v in den sieben Grundpunkten seien: $v_1, v_2, \ldots v_7$. Ferner sei s die Summe der drei Werte von v, wofür x und y unendlich werden. Dann wird Z eine elliptische Funktion neunten Grades von v; sie wird von der dritten Ordnung unendlich für die drei Werte von v, wo x und y unendlich werden. Sie verschwindet für $v = v_1, v_2, \ldots v_7$ und für $v = 0$,

für $v=0$ aber von der zweiten Ordnung. Denn da P_0 auf der Linie $L=0$ liegt, so fällt der zu P_0 konjugierte Punkt mit P_0 zusammen. Hieraus folgt, nach dem *Euler-Abel*schen Theorem, daß man setzen kann:

$$v_1+v_2+\cdots+v_7=3s.$$

X hat, abgesehen von $v=0$, dieselben Null- und Unendlichkeitspunkte wie Z. Demnach ist der Quotient $\frac{X}{Z}=\lambda$ eine elliptische Funktion zweiten Grades $\varphi(v)$, die für $v=0$ von der zweiten Ordnung unendlich wird. Der Quotient $\frac{L}{Z^2}=\varrho$ wird dagegen eine elliptische Funktion dritten Grades $\psi(v)$, die für $v=0$ von der dritten Ordnung unendlich wird. Da ihr Quadrat rational in $\varphi(v)$ ist, so ist $\psi(v)$, bis auf einen konstanten Faktor, mit der Ableitung $\varphi'(v)$ identisch.

U_a, betrachtet als abhängig von den willkürlichen Variabeln x, y, verschwindet in P_a von der zweiten Ordnung. Daraus folgt, daß U_a als Funktion von v von der zweiten Ordnung für $v=v_a$ verschwindet. Z verschwindet dort nur von der ersten Ordnung. Mithin muß für $v=v_a$ $\lambda-\lambda_a$ gleich 0 sein. Es ist also:

$$\lambda_a=\varphi(v_a).$$

$F_{a\beta}$ ist eine elliptische Funktion dritten Grades, die für $v=v_a$, $v=v_\beta$ verschwindet. Der dritte Nullpunkt ist: $v=s-v_a-v_\beta$. Da $F_{a\beta}G_{a\beta}=U_{a\beta}$ ist, so muß für denselben dritten Wert auch $U_{a\beta}$ verschwinden. Demnach ist

$$\lambda_{a\beta}=\varphi(s-v_a-v_\beta).$$

Wir haben also folgende 28 Gleichungen:

$$U_a=Z\big(\varphi(v)-\varphi(v_a)\big),$$
$$U_{a\beta}=Z\big(\varphi(v)-\varphi(s-v_a-v_\beta)\big).$$

Da $\varphi(v)$ eine gerade Funktion ist, so folgt hieraus außerdem, daß U_a für $v=-v_a$, und $G_{a\beta}$, der andere Faktor von $U_{a\beta}$, für $v=v_a+v_\beta-s$ verschwindet. Bilden wir jetzt die Quotienten

$$\frac{G_{12}G_{34}G_{56}}{Z^2}=P,\quad \frac{F_{12}F_{34}F_{56}U_7}{Z^2}=Q.$$

P hat, da der Zähler eine V-Funktion ist, bei willkürlichen Werten von x, y die Form:

$$P=f(\lambda,\mu,\varrho)=A\varrho+B\lambda^2+C\lambda+D,$$

wo A und B Konstanten sind, während C eine lineare, D eine quadratische Funktion von μ ist. Nehmen wir μ konstant an und betrachten P als

abhängig von v, so ist dies eine elliptische Funktion vierten Grades, die für $v=0$ von der vierten Ordnung unendlich wird, und die für die vier Werte

$$v_1+v_2-s,\ v_3+v_4-s,\ v_5+v_6-s,\ v_7$$

verschwindet. Von Q gilt das entsprechende, nur verschwindet Q für die entgegengesetzten Werte von v. Es ist daher, wenn man $P=P(v)$ setzt, $Q=cP(-v)$. Da aber der Quotient $\frac{P}{Q}$ gleich 1 wird für $v=0$, so muß c gleich 1, also Q gleich $P(-v)$ sein. Da bei der Vertauschung von v mit $-v$ nicht nur μ, sondern auch λ ungeändert bleibt, ϱ aber in $-\varrho$ übergeht, so ist

$$Q=f(\lambda,\mu,-\varrho)=-A\varrho+B\lambda^2+C\lambda+D.$$

Es ist daher $P-Q$ gleich $2A\varrho$, oder:

$$G_{12}G_{34}G_{56}-F_{12}F_{34}F_{56}U_7=2AL.$$

Indem man dies gleich 0 setzt, bekommt man eine der besonderen Formen für die Gleichung der *Aronhold*schen Kurve. Sie ist hergestellt unter der Annahme $\mu=$ Konst.; da aber diese Konstante willkürlich ist, so ist das Resultat von der Annahme unabhängig.

Die Gleichung bleibt richtig, wenn man die Indizes vertauscht. Setzen wir für den Augenblick:

$$\frac{G_{\alpha\beta}U_\alpha U_\beta}{F_{\alpha\beta}}=\Phi_{\alpha\beta},\qquad \prod_{\alpha=1}^{7}(U_\alpha)=R,$$

so erhalten wir, indem wir den Punkt (x,y) auf die Kurve $L=0$ beschränken:

$$\Phi_{12}\Phi_{34}\Phi_{56}=R.$$

Es ist daher $\Phi_{56}=\Phi_{57}$, und $\Phi_{\alpha\beta}$ eine von den Indizes unabhängige Größe. Bezeichnen wir sie mit Φ, so haben wir die Formeln:

$$\frac{G_{\alpha\beta}}{F_{\alpha\beta}}=\frac{\Phi}{U_\alpha U_\beta},$$

$$\Phi^3=\prod_{\alpha=1}^{7}(U_\alpha).$$

Darin sind die besonderen Formen der Gleichung $L=0$ zusammengefaßt, nicht nur die hingeschriebenen, sondern z. B. auch folgende:

$$G_{12}G_{34}F_{13}F_{24}=F_{12}F_{34}G_{13}G_{24}.$$

Diese Formen machen evident, daß auf der *Aronhold*schen Kurve eine Anzahl spezieller Punkte und Punktepaare liegen. Dazu gehört das Paar, in dem der Kegelschnitt, der durch fünf Grundpunkte gelegt ist,

sich mit der Geraden schneidet, die durch die beiden anderen hindurchgeht. Dazu treten die sieben Punkte, die den Doppelpunkten konjugiert sind; ihnen entsprechen, bei der Darstellung durch elliptische Funktionen, diejenigen Punkte auf der Kurve dritter Ordnung, die zu den Werten $v = -v_a$ gehören.

Aus den Gleichungen

$$\frac{G_{\alpha\beta}}{F_{\alpha\beta}} = \frac{\Phi}{U_\alpha U_\beta}, \quad F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}$$

folgt:

$$F_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{U_\alpha U_\beta U_{\alpha\beta}}{\Phi}}, \quad G_{\alpha\beta} = \sqrt{\Phi \frac{U_{\alpha\beta}}{U_\alpha U_\beta}}.$$

Nun besteht zwischen F_{17}, F_{27}, F_{37} eine lineare Gleichung:

$$a F_{17} + b F_{27} + c F_{37} = 0,$$

da die drei F lineare Funktionen von x, y sind, die im Punkte P_7 verschwinden; die Summe der Koeffizienten muß 0 sein, denn die F werden gleich 1 in P_0. — Dies ist eine Identität. Aber aus ihr folgt:

$$a\sqrt{U_1 U_{17}} + b\sqrt{U_2 U_{27}} + c\sqrt{U_3 U_{37}} = 0.$$

Das ist keine Identität, sondern die Doppeltangentenform für die Gleichung der ebenen Kurve vierter Ordnung $M = 0$.

Die F, G und U sind hier so bestimmt, daß sie in dem willkürlich gewählten Punkte P_0 der Kurve $L = 0$ den Wert 1 haben. Davon könnten wir absehen und direkt für diese Ausdrücke die entsprechenden Determinanten setzen. Das führt, was die Koeffizienten anbetrifft, noch zu einigen interessanten Resultaten, die ich in früheren Arbeiten entwickelt habe, hier aber kommt es mir nur auf das an, was einfach ist.

II. Es seien sechs Punkte im Raume gegeben. Als U-Funktionen bezeichnen wir die quadratischen von x, y, z, die in den sechs Punkten verschwinden. Wenn wir unter ihnen vier linear unabhängige auswählen: X, Y, Z, U, so ist die allgemeine: $aX + bY + cZ + dU$. Die Quotienten

$$\frac{X}{U} = \lambda, \quad \frac{Y}{U} = \mu, \quad \frac{Z}{U} = \nu$$

sind rationale Funktionen von λ, μ, ν. Aber die drei Flächen $X - \lambda U = 0$, $Y - \mu U = 0$, $Z - \nu U = 0$ haben acht Schnittpunkte; sechs davon sind die gegebenen; sie haben noch zwei andere, von denen der eine eindeutig durch den anderen bestimmt ist; wir nennen sie konjugierte Punkte. Wir schließen daraus wieder, daß x, y, z sich darstellen lassen als rationale

Funktionen von $\lambda, \mu, \nu, \varrho$, wobei ϱ die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion von λ, μ, ν ist. Zu konjugierten Punkten gehören dieselben Werte von λ, μ, ν, aber entgegengesetzte von ϱ.

Mit V bezeichnen wir die Funktionen vierten Grades von x, y, z, die in den sechs Grundpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden. Dazu gehört jede homogene quadratische Funktion von X, Y, Z, U; und diese hat zehn Koeffizienten. Die Anzahl der linear unabhängigen V-Funktionen aber ist

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 \cdot 4 = 11.$$

Es muß demnach eine elfte V-Funktion existieren, die nicht in dieser Form darstellbar ist. Bezeichnen wir sie speziell mit V, so ist die allgemeine V-Funktion: $\alpha V + F(X, Y, Z, U)$.

Unter den Funktionen achten Grades, die in den sechs Punkten von der vierten Ordnung verschwinden, sind

$$\frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 45$$

linear-unabhängige. Aber eine Funktion dieser Art wird dargestellt durch den Ausdruck

$$\alpha_2 V + \alpha_4,$$

in dem α_2 und α_4 homogene Funktionen von X, Y, Z, U sind, α_2 vom zweiten, α_4 vom vierten Grade. Dieser Ausdruck hat $10 + 35$, also 45 Koeffizienten. Wir schließen daraus, daß sich V^2 in der Form $\alpha_2 V + \alpha_4$ darstellen läßt. Setzen wir: $V = L + \frac{1}{2}\alpha_2$, so erhalten wir:

$$(L(x, y, z))^2 = M(X, Y, Z, U).$$

Es gibt demnach eine spezielle V-Funktion, die nicht rational in X, Y, Z, U ist, deren Quadrat aber als homogene ganze Funktion vierten Grades dieser vier Veränderlichen dargestellt werden kann. $L = 0$ ist die Gleichung der *Weddle*schen, $M = 0$ die der *Kummer*schen Fläche.

Fügen wir zu λ, μ, ν hinzu:

$$\frac{L}{U^2} = \varrho,$$

so ist ϱ^2 eine ganze Funktion von λ, μ, ν, und x, y, z sind durch $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ rational ausdrückbar.

Es gibt 16 besondere U-Funktionen. Mit U_α, wo α eine der Zahlen $1, 2, \ldots 6$ ist, bezeichnen wir diejenige U-Funktion, die im Punkte

P_a von der zweiten Ordnung verschwindet, so daß $U_a = 0$ die Gleichung des Kegels zweiten Grades ist, dessen Spitze in P_a liegt und der durch die fünf übrigen Punkte hindurchgeht. $U_{a\beta\gamma}$ sei das Produkt der beiden Linearfaktoren $F_{a\beta\gamma}$, $F_{\varkappa\lambda\mu}$, von denen der eine in P_a, P_β, P_γ, der andere in den drei übrigen Punkten verschwindet. Hiernach ist: $U_{a\beta\gamma} = U_{\varkappa\lambda\mu}$. Die konstanten Faktoren bestimmen wir, indem wir auf der *Weddle*schen Fläche willkürlich einen festen Punkt P_0 annehmen und fordern, daß in diesem Punkte U_a und $F_{a\beta\gamma}$, also auch $U_{a\beta\gamma}$ den Wert 1 haben. Ferner denken wir uns X, Y, Z, U so gewählt, daß im Punkte P_0 die Größen Y, Z, U gleich 0, X aber gleich 1 wird. Die Funktion M ist dann, da L, und somit auch M, im Punkte P_0 gleich 0 ist, in bezug auf X nur vom dritten Grade. — Nun haben wir:

$$\varrho^2 = R(\lambda),$$

wo $R(\lambda)$ eine ganze Funktion dritten Grades ist, deren Koeffizienten von μ und ν abhängen. Wir haben ferner, wenn wir irgend eine der sechzehn speziellen U-Funktionen herausgreifen:

$$U_m = X + a_m Y + b_m Z + c_m U.$$

Der Koeffizient von X muß gleich 1 sein, weil Y, Z, U in P_0 verschwinden, X und U_m aber gleich 1 werden. Wir können demnach schreiben:

$$U_m = U(\lambda - \lambda_m),$$

wobei λ_m eine lineare Funktion von μ, ν ist. Endlich hat, wenn V irgend eine V-Funktion bedeutet, der Quotient

$$\frac{V}{U^2}$$

die Gestalt:

$$A\varrho + B\lambda^2 + C\lambda + D,$$

wo A und B Konstanten sind, während C eine lineare, D eine quadratische Funktion von μ, ν ist.

Wir nehmen jetzt μ und ν konstant an. Der Punkt x, y, z wird dadurch beschränkt auf eine Raumkurve, den Durchschnitt der beiden Flächen zweiten Grades $Y - \mu U = 0$, $Z - \nu U = 0$. Das ist eine Linie, auf der die sechs Grundpunkte liegen, und auch P_0. Wir fassen x, y, z als elliptische Funktionen vierten Grades einer Größe v auf. Die Summe der vier Werte, wofür sie unendlich werden, sei s. Es sei ferner $v = 0$ in P_0, und $v = v_1, \ldots v_6$ in den sechs Grundpunkten. U, als Funktion

von v betrachtet, ist eine elliptische Funktion achten Grades. Sie verschwindet für $v = v_1, v_2, \dots v_6$ und für $v = 0$, für $v = 0$ von der zweiten Ordnung, da P_0 mit seinem konjugierten Punkte identisch ist. Sie wird unendlich, von der doppelten Ordnung, zugleich mit x, y, z; wir setzen deshalb:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_6 = 2s.$$

X hat dieselben Null- und Unendlichkeitspunkte wie U, nur daß X nicht für $v = 0$ verschwindet; der Quotient λ ist demnach eine elliptische Funktion zweiten Grades $\varphi(v)$, die für $v = 0$ von der zweiten Ordnung unendlich wird. ϱ wird eine elliptische Funktion dritten Grades $\psi(v)$, die für $v = 0$ von der dritten Ordnung unendlich wird, und deren Quadrat, wegen der Gleichung $\varrho^2 = R(\lambda)$, in $\varphi(v)$ rational ist. $\psi(v)$ ist daher nur um einen konstanten Faktor von der ungeraden Funktion $\varphi'(v)$ unterschieden. λ_m wird eine Konstante. Aber U_a verschwindet für $v = v_a$ von der zweiten Ordnung, Z nur von der ersten; folglich verschwindet $\lambda - \lambda_a$ für $v = v_a$. Das heißt: es ist $\lambda_a = \varphi(v_a)$.

$F_{\alpha\beta\gamma}$ ist eine elliptische Funktion vierten Grades; sie verschwindet für $v = v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ und den vierten Wert $s - v_\alpha - v_\beta - v_\gamma$. Demnach verschwindet auch $U_{\alpha\beta\gamma}$ für den letzteren Wert, und es ist

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \varphi(s - v_\alpha - v_\beta - v_\gamma).$$

Dadurch hat man die 16 Gleichungen:

$$U_\alpha = U(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha)),$$
$$U_{\alpha\beta\gamma} = U(\varphi(v) - \varphi(s - v_\alpha - v_\beta - v_\gamma)).$$

Gehen wir über zu den V-Funktionen. Sie werden elliptische vom Grade 16; sie verschwinden für $v_1, v_2, \dots v_6$ von der zweiten Ordnung und außerdem in vier anderen Punkten. Wenn wir sie durch U^2 dividieren, bekommen wir elliptische Funktionen vierten Grades, die für $v = 0$ von der vierten Ordnung unendlich werden. Wir bilden speziell die Quotienten:

$$P = \frac{F_{134} F_{156} U_2}{U^2}, \quad Q = \frac{F_{234} F_{256} U_1}{U^2},$$

deren Zähler V-Funktionen sind.

P, betrachtet als Funktion von v, verschwindet für die Werte

$$v = s - v_1 - v_3 - v_4, \; s - v_1 - v_5 - v_6, \; v_1, \; -v_2,$$

Q für die entgegengesetzten. Der Quotient wird gleich 1 für $v = 0$. Es ist daher: $Q(v) = P(-v)$.

Denken wir uns, bei unabhängigen Werten von x, y, z, P dargestellt in der Form

$$P = A\varrho + B\lambda^2 + C\lambda + D = F(\lambda, \mu, \nu, \varrho),$$

dann aber μ, ν konstant, $\lambda = \varphi(v)$, $\varrho = \psi(v)$ gesetzt; so geht Q hieraus hervor, indem man v mit $-v$ vertauscht. Dabei bleiben λ, μ, ν ungeändert, ϱ geht in $-\varrho$ über. Es ist daher $P - Q = 2A\varrho$ und

$$F_{134}F_{156}U_2 - F_{234}F_{256}U_1 = 2AL.$$

Nun setzen wir $L = 0$; wir haben dann eine besondere Form für die Gleichung der *Weddle*schen Fläche.

Wir setzen für den Augenblick

$$\frac{F_{\alpha\beta\gamma}U_\varkappa U_\lambda U_\mu}{F_{\varkappa\lambda\mu}} = \Phi_{\alpha\beta\gamma},$$

indem wir unter $\varkappa, \lambda, \mu$ die Indizes der drei von $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ verschiedenen Grundpunkte verstehen. Dann zeigt sich, daß für $L = 0$:

$$\Phi_{134} = \Phi_{234}$$

ist. Die Größe $\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ hängt also von den Indizes α, β, γ gar nicht ab. Wir haben:

$$\frac{F_{\alpha\beta\gamma}U_\varkappa U_\lambda U_\mu}{F_{\varkappa\lambda\mu}} = \Phi,$$

$$\frac{F_{\varkappa\lambda\mu}U_\alpha U_\beta U_\gamma}{F_{\alpha\beta\gamma}} = \Phi,$$

und daher:

$$\Phi^2 = \prod_{a=1}^{6}(U_a).$$

Zur Gleichung

$$\frac{F_{\alpha\beta\gamma}}{F_{\varkappa\lambda\mu}} = \frac{U_\alpha U_\beta U_\gamma}{\Phi}$$

tritt hinzu

$$F_{\alpha\beta\gamma}F_{\varkappa\lambda\mu} = U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Es ist daher:

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\frac{U_\alpha U_\beta U_\gamma U_{\alpha\beta\gamma}}{\Phi}}.$$

Zwischen $F_{156}, F_{256}, F_{356}$ besteht eine lineare Gleichung:

$$aF_{156} + bF_{256} + cF_{356} = 0.$$

Aus ihr folgt:

$$a\sqrt{U_1U_{156}} + b\sqrt{U_2U_{256}} + c\sqrt{U_3U_{356}} = 0,$$

und dies ist die bekannte irrationale Form für die Gleichung der *Kummer*schen Fläche.

Von besonderem Interesse sind sechzehn Linien, die auf der *Weddle*schen Fläche liegen, jede von der Beschaffenheit, daß längs ihr sechs von den 16 U-Funktionen verschwinden. Es sind das die 15 Verbindungsgeraden der Grundpunkte, $C_{\alpha\beta}$, und die Raumkurve dritter Odnung C, die durch die sechs Grundpunkte bestimmt ist. Auf der letzteren verschwinden gemeinsam $U_1, U_2, \ldots U_6$, auf C_{12} dagegen $U_1, U_2, U_{123}, U_{124}, U_{125}, U_{126}$, — da U_{123} den Faktor F_{123} hat.

III. Wir nehmen acht Punkte frei in der Ebene an. Es gibt zwei verschiedene kubische Funktionen A, B, die in allen 8 Punkten verschwinden; sie haben einen neunten Nullpunkt P_0 gemeinsam, der durch die acht gegebenen: $P_1, P_2, \ldots P_8$ eindeutig bestimmt ist.

Als U-Funktionen sehen wir hier die ganzen Funktionen sechsten Grades an, die in den acht Grundpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden. Dazu gehören die drei: $X = A^2$, $Y = AB$, $Z = B^2$, die in P_0 von der zweiten Ordnung verschwinden. Aber es gibt, wie man leicht sieht, auch solche, die in P_0 nicht verschwinden. Eine davon bezeichnen wir speziell mit U; wir nehmen sogar an, daß U in P_0 den Wert 1 hat. Dann folgt, daß sich alle U-Funktionen linear durch U, X, Y, Z ausdrücken lassen. Denn die Anzahl der linear-unabhängigen U-Funktionen ist

$$\frac{7\cdot 8}{1\cdot 2} - 8\cdot\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2} = 4.$$

Setzen wir

$$\frac{U}{B^2} = \lambda, \quad \frac{A}{B} = \mu,$$

so gehören zu einem Wertepaar λ, μ zwei von x, y. Denn die Kurven $U - \lambda B^2 = 0$, $A - \mu B = 0$ haben achtzehn Schnittpunkte, von denen sechzehn auf die doppelt zu zählenden Grundpunkte fallen.

Wir finden die zur Auflösung der Gleichungen nach x, y notwendige Wurzelgröße ϱ, indem wir V-Funktionen betrachten, die vom neunten Grade sind und in den Grundpunkten von der dritten Ordnung verschwinden. Die Zahl der linear unabhängigen ist

$$\frac{10\cdot 11}{1\cdot 2} - 8\cdot\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} = 7.$$

Sechs davon sind

$$AU,\ BU,\ A^3,\ A^2B,\ AB^2,\ B^3.$$

Eine siebente, die nicht wie diese sechs in P_0 verschwindet, sei V. Dann

ist die allgemeinste V-Funktion: $\alpha_0 V + \alpha_1 U + \alpha_3$, wo α_0 eine Konstante, α_1 eine homogene lineare, α_3 eine homogene kubische Funktion von A, B ist.

Die Anzahl der linear-unabhängigen Funktionen achtzehnten Grades, die in den acht Punkten von der sechsten Ordnung verschwinden, ist

$$\frac{19 \cdot 20}{1 \cdot 2} - 8 \cdot \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 22.$$

Eine solche Funktion ist V^2, aber auch

$$V(\alpha_1 U + \alpha_3) + \alpha_0 U^3 + \alpha_2 U^2 + \alpha_4 U + \alpha_6,$$

wenn α_1, α_3 etc. homogene Funktionen der beiden Größen A, B sind, von dem durch die Indizes bezeichneten Grade. Der ganze Ausdruck hat 22 Koeffizienten; also ist V^2 in der hier angegebenen Form darstellbar. Die mit V multiplizierte Form können wir fortbringen, indem wir V durch $V - \frac{1}{2}(\alpha_1 U + \alpha_3) = L$ ersetzen. L ist dann eine spezielle V-Funktion. Für sie gilt die Gleichung

$$L^2 = G_0 U^3 + G_2 U^2 + G_4 U + G_6 = M(U, A, B),$$

wobei G_0 eine von 0 verschiedene Konstante ist, während G_2, G_4, G_6 homogene Funktionen zweiten, vierten, sechsten Grades von A, B bedeuten. Diese Koeffizienten lassen sich auch als ganze Funktionen ersten, zweiten, dritten Grades der durch die Gleichung $Y^2 = ZX$ verbundenen Größen X, Y, Z darstellen. Dann erhalten wir:

$$(L(x, y))^2 = M(X, Y, Z, U),$$

wobei M eine homogene Funktion dritten Grades von X, Y, Z, U ist. Es stellt demnach $M = 0$ die Raumkurve dar, in der sich die Fläche dritter Ordnung mit einem Kegel zweiter Ordnung schneidet. $L = 0$ aber ist die Gleichung der *Bertini*schen Kurve. —

Wählen wir den konstanten Faktor von L so, daß auch L, ebenso wie U, im Punkte P_0 den Wert 1 hat, so ist G_0 gleich 1. Ferner kann man U durch $U - \frac{1}{3} G_2$ ersetzen. Dadurch fällt G_2 fort; man bekommt die reduzierte Gleichung

$$L^2 = U^3 + G_4 U + G_6,$$

und es ist auch hier von Interesse, daß sich eine solche Gleichung immer rational auflösen läßt.

Es existieren eine große Anzahl spezieller U- und V-Funktionen,

die wichtig sind. Erstens acht U, deren jede in einem der acht Punkte von der dritten Ordnung verschwindet: $U_1, U_2, \ldots U_8$. Soll U_a in P_a von der dritten Ordnung verschwinden, so haben wir zwischen den 28 Koeffizienten dieser Funktion sechsten Grades $6+7\cdot3=27$ Bedingungen; U_a ist also bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Wir bezeichnen ferner mit $F_{\alpha\beta}$ die lineare Funktion, die in den Punkten P_α, P_β verschwindet, mit $G_{\alpha\beta\gamma}$ die quadratische, die in den fünf von $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ verschiedenen Punkten verschwindet, mit $H_{\alpha,\beta}$ die Funktion dritten Grades, die im Punkte P_α von der zweiten Ordnung verschwindet, von der ersten in den sechs von P_α, P_β verschiedenen Punkten. Wir gehen weiter. $I_{\alpha\beta\gamma}$ sei die Funktion vierten Grades, die in den Punkten $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ von der zweiten, in den übrigen Punkten von der ersten Ordnung verschwindet, $K_{\alpha\beta}$ die Funktion fünften Grades, die in P_α, P_β von der ersten, in den sechs übrigen Punkten von der zweiten Ordnung 0 wird. Alle diese Funktionen sind durch die angegebenen Bedingungen bestimmt, bis auf konstante Faktoren. Die Faktoren aber wählen wir so, daß sie alle, auch U_a, in P_0 den Wert 1 haben.

Man sieht nun leicht, daß $F_{\alpha\beta}$ und $K_{\alpha\beta}$, ebenso $G_{\alpha\beta\gamma}$ und $I_{\alpha\beta\gamma}$, $H_{\alpha,\beta}$ und $H_{\beta,\alpha}$ komplementär sind und daß die Produkte

$$F_{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta},$$
$$G_{\alpha\beta\gamma}I_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\beta\gamma},$$
$$H_{\alpha,\beta}H_{\beta,\alpha} = \overline{U}_{\alpha\beta}$$

U-Funktionen sind, die in den acht Punkten von der zweiten Ordnung 0 werden. Wir haben so, wenn wir die U_a mit einrechnen,

$$8+\frac{7\cdot8}{1\cdot2}+\frac{6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3}+\frac{7\cdot8}{1\cdot2}=120$$

spezielle U-Funktionen. Jede davon läßt sich, da sie ebenso wie U in P_0 gleich 1 wird, während A, B dort verschwinden, in der Form darstellen:

$$U_m = U + a_m A^2 + b_m AB + c_m B^2$$

oder auch:

$$U_m = B^2(\lambda - \lambda_m),$$

wobei λ_m von λ unabhängig und eine quadratische Funktion von μ ist.

Zu den V-Funktionen gehört vor allem L. Wenn wir

$$\frac{L}{B^3} = \varrho$$

setzen, so ist

$$\varrho^2 = \lambda^3 + g_4\lambda + g_6.$$

g_4 und g_6 sind ganze Funktionen von μ allein, g_4 vom vierten, g_6 vom sechsten Grade. Die allgemeine V-Funktion hat die Form

$$a_0 L + U(aA + bB) + cA^3 + dA^2B + eAB^2 + fB^3,$$

und wenn sie in P_0 gleich 1 ist, so ist a_0 gleich 1.

Es ist demnach, unter dieser Voraussetzung:

$$V = B^3\{\varrho + \lambda(a\mu + b) + c\mu^3 + d\mu^2 + e\mu + f\}.$$

Nun nehmen wir μ konstant. Die λ_m werden dann Konstanten, ebenso g_4 und g_6; der Punkt x, y aber wird auf die Kurve dritter Ordnung $A - \mu B = 0$ beschränkt, auf der die acht Grundpunkte und P_0 liegen. Wir betrachten x, y als elliptische Funktionen dritten Grades einer Größe v, die in P_0 den Wert 0 hat, in den Grundpunkten die Werte $v_1, v_2, \dots v_8$; außerdem sei s die Summe der drei Werte von v, für die x, y unendlich werden. Hier ist nun B eine elliptische Funktion neunten Grades, die für $v = v_1, v_2, \dots v_8$ und für $v = 0$ verschwindet, die ferner zugleich mit x, y unendlich wird, aber von der dritten Ordnung. Es ist daher

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_8 = 3s.$$

U ist vom 18-ten Grade und wird unendlich wie B^2; es verschwindet aber auch wie B^2 für $v = v_1, v_2, \dots v_8$. Also ist der Quotient

$$\frac{U}{B^2} = \lambda$$

eine elliptische Funktion zweiten Grades $\varphi(v)$, die für $v = 0$ von der zweiten Ordnung unendlich wird.

L ist vom 27-ten Grade; es wird unendlich an denselben Stellen und von derselben Ordnung wie B^3. Außerdem verschwindet L für $v = v_1, v_2, \dots v_8$ von derselben Ordnung wie B^3. Folglich ist

$$\frac{L}{B^3} = \varrho$$

eine elliptische Funktion dritten Grades $\psi(v)$, die für $v = 0$ von der dritten Ordnung unendlich wird. Wegen der Gleichung $\varrho^2 = \lambda^3 + g_4\lambda + g_6$ ist $\psi(v)$ mit der Ableitung $\varphi'(v)$ identisch oder davon nur um einen konstanten Faktor unterschieden. Es ist also $\varphi(v)$ gerade, $\psi(v)$ ungerade.

U_α verschwindet für $v = v_\alpha$ von der dritten Ordnung, B^2 nur von der zweiten. Es ist daher $\lambda - \lambda_\alpha$ gleich 0 für $v = v_\alpha$, und λ_α gleich $\varphi(v_\alpha)$.

$F_{\alpha\beta}$ verschwindet für die drei Werte $v_\alpha, v_\beta, s - v_\alpha - v_\beta$; daher ist:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \varphi(s - v_\alpha - v_\beta).$$

G_{123} ist in bezug auf v vom sechsten Grade; es verschwindet für $v = v_4$, $v_5, \ldots v_8$ und für

$$v = 2s - (v_4 + v_5 + \cdots + v_8).$$

Der letzte Wert ist mit $v_1 + v_2 + v_3 - s$ identisch; es ist daher:

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \varphi(v_\alpha + v_\beta + v_\gamma - s).$$

$H_{1,2}$ ist eine elliptische Funktion neunten Grades. Sie verschwindet von der zweiten Ordnung für $v = v_1$, von der ersten für $v = v_3, v_4, \ldots v_8$ und für

$$v = 3s - 2v_1 - (v_3 + v_4 + \cdots + v_8).$$

Dies ist mit $v_2 - v_1$ identisch. Daher ist:

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \varphi(v_\beta - v_\alpha).$$

Wir haben also — indem wir berücksichtigen, daß $\varphi(v)$ eine gerade Funktion ist — das System der Gleichungen:

$$\begin{aligned} U_\alpha &= B^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha)), \\ U_{\alpha\beta} &= B^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha + v_\beta - s)), \\ U_{\alpha\beta\gamma} &= B^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha + v_\beta + v_\gamma - s)), \\ \bar{U}_{\alpha\beta} &= B^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha - v_\beta)). \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\frac{H_{1,2}U_2}{B^3} = P, \quad \frac{H_{2,1}U_1}{B^3} = Q.$$

Die Zähler sind, wie man sofort sieht, V-Funktionen, und zwar solche, die in P_0 den Wert 1 haben. P läßt sich demnach darstellen in der Form: $\varrho + G(\lambda, \mu)$, wo $G(\lambda, \mu)$ eine ganze Funktion von λ, μ ist. Von Q gilt dasselbe. Setzen wir: μ konstant, $\lambda = \varphi(v)$, $\varrho = \psi(v)$, so ist P eine elliptische Funktion dritten Grades, die für $v = 0$ von der dritten Ordnung unendlich wird; sie wird 0 für $v = v_2 - v_1$, — da der Zähler den Faktor $H_{1,2}$ enthält —, ferner für $v = v_1$ und $v = -v_2$. Q verschwindet für die entgegengesetzten Werte, und da der Quotient gleich 1 wird für $v = 0$, so muß $Q(v) = -P(-v)$ sein. Daraus folgt: $Q = \varrho - G(\lambda, \mu)$; und zwar muß das gelten für willkürliche Werte von λ, μ. Es ist daher $P + Q$ gleich 2ϱ und

$$H_{1,2}U_2 + H_{2,1}U_1 = 2L.$$

Zu demselben Schluß kommen wir, wenn wir die Quotienten

$$\frac{U_3 F_{12} G_{123}}{B^3}, \quad \frac{K_{12} I_{123}}{B^3}$$

oder:

$$\frac{F_{12} I_{345} I_{678}}{B^3}, \quad \frac{K_{12} G_{345} G_{678}}{B^3}$$

vergleichen; es ist hiernach auch:

$$U_3 F_{12} G_{123} + K_{12} I_{123} = 2L,$$
$$F_{12} I_{345} I_{678} + K_{12} G_{345} G_{678} = 2L.$$

Damit sind verschiedene Formen der *Bertini*schen Gleichung $L = 0$ gegeben. Wir fassen sie zusammen. Wenn wir $L = 0$ setzen, so ist

$$\frac{U_1 U_2 U_3 G_{123}}{I_{123}} = - \frac{U_1 U_2 K_{12}}{F_{12}}.$$

Dies zeigt, daß der eine wie der andere Quotient bei der Vertauschung der Indizes ungeändert bleibt. Wir führen dementsprechend ein:

$$\frac{U_1 U_2 K_{12}}{F_{12}} = \varphi,$$
$$\frac{U_1 U_2 U_3 G_{123}}{I_{123}} = - \varphi.$$

Die dritte Darstellung von $2L$ liefert dann nur noch die eine Formel:

$$\varphi^3 = - \prod_{a=1}^{8} (U_a).$$

Wir fassen dies so zusammen:

$$\frac{H_{a,\beta}}{H_{\beta,a}} = - \frac{U_a}{U_\beta}, \quad \frac{F_{a\beta}}{K_{a\beta}} = \frac{U_a U_\beta}{\varphi}, \quad \frac{I_{a\beta\gamma}}{G_{a\beta\gamma}} = - \frac{U_a U_\beta U_\gamma}{\varphi}.$$

Da zugleich:

$$H_{a,\beta} H_{\beta,a} = \bar{U}_{a\beta}, \quad F_{a\beta} K_{a\beta} = U_{a\beta}, \quad G_{a\beta\gamma} I_{a\beta\gamma} = U_{a\beta\gamma}$$

ist, so hat man:

$$F_{a\beta} = \sqrt{\frac{U_a U_\beta U_{a\beta}}{\varphi}}, \quad K_{a\beta} = \sqrt{\frac{\varphi U_{a\beta}}{U_a U_\beta}};$$
$$G_{a\beta\gamma} = \sqrt{\frac{-\varphi U_{a\beta\gamma}}{U_a U_\beta U_\gamma}}, \quad I_{a\beta\gamma} = \sqrt{\frac{-U_a U_\beta U_\gamma U_{a\beta\gamma}}{\varphi}};$$
$$H_{a,\beta} = \sqrt{\frac{-U_a \bar{U}_{a\beta}}{U_\beta}}.$$

Nun besteht aber eine identische Gleichung zwischen den linearen Ausdrücken F_{18}, F_{28}, F_{38}:

$$a F_{18} + b F_{28} + c F_{38} = 0.$$

Daher ergibt sich:

$$a \sqrt{U_1 U_{18}} + b \sqrt{U_2 U_{28}} + c \sqrt{U_3 U_{38}} = 0,$$

und dies ist eine der Gleichungen, durch die sich die hundertzwanzig Ebenen $U_m = 0$ als dreifache Tangentialebenen der Raumkurve erweisen. —

IV. Wir nehmen sieben Punkte $P_1, P_2, \dots P_7$ im Raume an. Durch sie lassen sich drei Flächen zweiten Grades legen, die sich noch in einem achten Punkte P_0 schneiden. Unter den U-Funktionen verstehen wir aber hier die ganzen Funktionen vierten Grades, die in den sieben Grundpunkten von der zweiten Ordnung verschwinden, und speziell unter U eine Funktion dieser Art, die in P_0 nicht verschwindet, sondern dort den Wert 1 hat. Die allgemeine U-Funktion ist dann:

$$\alpha_0 U + F(A, B, C),$$

wobei α_0 eine Konstante ist; sie ist zugleich der Wert der Funktion im Punkte P_0. $F(A, B, C)$ aber ist ein homogener quadratischer Ausdruck, gebildet aus den drei linear unabhängigen Funktionen zweiten Grades A, B, C, die in $P_1, P_2, \dots P_7$ und auch in P_0 verschwinden. Setzt man

$$\frac{U}{C^2} = \lambda, \quad \frac{A}{C} = \mu, \quad \frac{B}{C} = \nu,$$

so sind λ, μ, ν rationale Funktionen von x, y, z. Umgekehrt sind x, y, z als Funktionen von λ, μ, ν nur durch Auflösung einer quadratischen Gleichung darstellbar.

Denn die Flächen $U - \lambda C^2 = 0$, $A - \mu C = 0$, $B - \nu C = 0$ haben sechzehn Punkte gemeinsam, von denen vierzehn auf die sieben Grundpunkte fallen, da diese doppelt zu zählen sind. Die Wurzelgröße ϱ, die adjungiert werden muß, wird gefunden, indem man neben den U- auch die V-Funktionen betrachtet. Diese sind vom sechsten Grade und sie verschwinden in den Grundpunkten von der dritten Ordnung. Die Zahl der linear-unabhängigen ist:

$$\frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 7 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14.$$

Eine Funktion dieser Art ist $\alpha_1 U + \alpha_3$, wenn wir allgemein mit α_λ eine homogene ganze Funktion von A, B, C bezeichnen, deren Grad gleich λ ist. Aber dieser Ausdruck enthält nur 13 Koeffizienten. Also muß eine V-Funktion vorhanden sein — wir bezeichnen sie speziell mit V —, die sich nicht so darstellen läßt. Sie verschwindet dann auch nicht in P_0; wir können festsetzen, daß sie in P_0 den Wert 1 hat.

Wenn man aber zu den Funktionen zwölften Grades übergeht, die, wie V^2, und wie jeder Ausdruck von der Form

$$V(\alpha_1 U + \alpha_3) + \alpha_0 U^3 + \alpha_2 U^2 + \alpha_4 U + \alpha_6$$

in den sieben Grundpunkten von der sechsten Ordnung verschwindet, so ist hier die Anzahl der linear-unabhängigen

$$\frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} - 7\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 63.$$

Ebenso groß ist die Anzahl der Koeffizienten des aufgestellten Ausdrucks:

$$\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}+\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}+1+\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}+\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}+\frac{7\cdot 8}{1\cdot 2}=63.$$

Demnach läßt sich V^2 identisch in der vorliegenden Form darstellen. Dabei ist α_0 gleich 1, weil V^2 und U^3 in P_0 gleich 1 werden, während die übrigen Formen verschwinden.

Indem wir, was erlaubt ist, V durch $V-\frac{1}{2}(\alpha_1 U+\alpha_3)=L$ ersetzen, vereinfacht sich die Gleichung. Wir erhalten für diese spezielle V-Funktion L:

$$L^2 = U^3 + G_2 U^2 + G_4 U + G_6.$$

Hier sind G_2, G_4, G_6 homogene Funktionen zweiten, vierten, sechsten Grades von A, B, C. Wir können sogar G_2 fortbringen; denn U läßt sich durch $U+\frac{1}{3}G_2$ ersetzen. Damit ist eine V-Funktion gewonnen, die nicht selbst rational in U, A, B, C ist, deren Quadrat aber rational ist; und setzen wir

$$\frac{L}{C^3}=\varrho,$$

so ist

$$\varrho^2 = \lambda^3 + g_4\lambda + g_6,$$

wobei g_4 und g_6 ganze Funktionen von μ, ν sind; durch $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ aber sind x, y, z rational ausdrückbar. Zu konjugierten Punkten gehören dieselben Werte von λ, μ, ν, aber entgegengesetzte von ϱ.

Wir definieren jetzt die speziellen U; es sind 63. U_a sei die Funktion vierten Grades, die in P_a von der dritten Ordnung verschwindet, in den sechs übrigen von der zweiten; $F_{\alpha\beta\gamma}$ die lineare, die in $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$, $G_{\alpha,\beta}$ die quadratische, die in P_α von der zweiten Ordnung verschwindet, und außerdem von der ersten in den fünf von P_α, P_β verschiedenen Punkten. $H_{\alpha\beta\gamma}$ sei endlich die kubische, die in $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ von der ersten, in den vier anderen Punkten von der zweiten Ordnung 0 wird. Alle diese Ausdrücke sind durch die hier gegebene Definition bestimmt bis auf konstante Faktoren; die Faktoren aber wählen wir so, daß sie im Punkte P_0 gleich 1 werden. Wir bilden die Produkte der komplementären und setzen:

$$F_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\beta\gamma},\ G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\alpha} = U_{\alpha\beta}.$$

Dann ist jede der 63 Größen $U_\alpha, U_{\alpha\beta}, U_{\alpha\beta\gamma}$, da sie in P_0 gleich 1 wird, in der Form darstellbar

$$U_m = U + f_m(A, B, C),$$

wo jedes f_m eine homogene quadratische Funktion von A, B, C ist. Dafür können wir schreiben:

$$U_m = C^2(\lambda - \lambda_m);$$

λ_m ist dann unabhängig von λ und eine quadratische Funktion von μ, ν.

Die V-Funktionen haben die allgemeine Form: $\alpha_0 L + \alpha_1 U + \alpha_3$, und wenn sie in P_0 gleich 1 werden: $L + \alpha_1 U + \alpha_3$. Dividieren wir durch C^3, so bekommen wir: $\varrho + \alpha\lambda + \beta$, wobei α, β nur von μ, ν abhängen, α linear, β kubisch. Solche V sind z. B.

$$G_{1,2} U_2,\ G_{1,2} G_{2,3} G_{3,1},\ U_1 F_{234} F_{567}.$$

Zu jeder V-Funktion, die in P_0 gleich 1 wird, $V = L + \alpha_1 U + \alpha_3$, existiert eine entsprechende $V' = L - \alpha_1 U - \alpha_3$, die dieselbe Eigenschaft hat, und es ist dann $V + V'$ gleich $2L$.

Wir nehmen μ, ν konstant an. Der Punkt x, y, z wird dadurch beschränkt auf die Raumkurve vierter Ordnung $A - \mu C = 0$, $B - \nu C = 0$; auf ihr liegen $P_1, P_2, \ldots P_7$ und P_0. Die λ_m werden Konstanten, ebenso die Koeffizienten α, β in der Gleichung $V = C^3(\varrho + \alpha\lambda + \beta)$. x, y, z werden elliptische Funktionen vierten Grades einer Größe v, von der wir annehmen, daß sie in P_0 verschwindet. Die Summe der vier Werte von v, wofür x, y, z unendlich werden, sei s; ferner seien $v_1, v_2, \ldots v_7$ die Werte von v in den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_7$. C wird vom achten Grade. Es verschwindet für die sieben Werte v_a und für $v = 0$; es wird von der zweiten Ordnung unendlich in den vier Unendlichkeitspunkten von x, y, z; mithin ist:

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_7 = 2s.$$

U wird vom sechzehnten Grade. Es verschwindet in den sieben Punkten v_a von der zweiten Ordnung, so wie C^2, und wird wie C^2 unendlich, wenn x, y, z unendlich werden. Der Quotient

$$\frac{U}{C^2} = \lambda$$

wird daher eine elliptische Funktion zweiten Grades $\varphi(v)$, die für $v = 0$ von der zweiten Ordnung unendlich wird. L wird vom 24-ten Grade. Es verschwindet in den sieben Punkten v_a, so wie C^3, von der dritten Ord-

nung und wird an denselben Stellen und von derselben Ordnung wie C^3 unendlich. Es ist daher

$$\frac{L}{C^3} = \varrho$$

eine elliptische Funktion dritten Grades $\psi(v)$, die für $v=0$ von der dritten Ordnung unendlich wird. Da außerdem $\varrho^2 = \lambda^3 + g_4\lambda + g_6$ ist, so ist $\psi(v)$ von der Ableitung $\varphi'(v)$ nur um einen konstanten Faktor unterschieden.

$\varphi(v)$ ist gerade, $\psi(v)$ ungerade. Wenn man v durch $-v$ ersetzt, so bleiben λ, μ, ν ungeändert, ϱ geht in $-\varrho$ über; man kommt zum konjugierten Punkte.

F_{123} wird, als elliptische Funktion vierten Grades von v, gleich 0 für:

$$v = v_1, v_2, v_3, s - v_1 - v_2 - v_3;$$

$G_{1,2}$, als elliptische Funktion achten Grades, für $v=v_1$ von der zweiten Ordnung, von der ersten für $v = v_3, v_4, \dots v_7$ und außerdem für

$$v = 2s - 2v_1 - (v_3 + v_4 + \cdots + v_7) = v_2 - v_1.$$

U_1, vom 16-ten Grade, wird 0 für $v=v_1$ von der dritten Ordnung, für $v = v_2, \dots v_7$ von der zweiten, von der ersten für

$$v = 4s - 3v_1 - 2(v_2 + v_3 + \cdots + v_7) = -v_1.$$

Es ist daher λ_1 gleich $\varphi(v_1)$, λ_{12} gleich $\varphi(v_1 - v_2)$, $\lambda_{123} = \varphi(v_1 + v_2 + v_3 - s)$, und

$$\begin{aligned} U_\alpha &= C^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha)), \\ U_{\alpha\beta} &= C^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha - v_\beta)), \\ U_{\alpha\beta\gamma} &= C^2(\varphi(v) - \varphi(v_\alpha + v_\beta + v_\gamma - s)). \end{aligned}$$

Wir bilden die Quotienten

$$P = \frac{U_1 G_{2,1}}{C^3}, \quad Q = \frac{U_2 G_{1,2}}{C^3},$$

deren Zähler V-Funktionen sind, die in P_0 den Wert 1 haben. Sie sind zunächst in der Form $\varrho + \alpha\lambda + \beta$ darstellbar, wo α und β nur von μ, ν abhängen. Setzt man μ, ν konstant, $\lambda = \varphi(v)$, $\varrho = \psi(v)$, so ist P eine elliptische Funktion dritten Grades, die für $v=v_2$, $v = v_1 - v_2$ und $v = -v_1$ verschwindet. Der andere Quotient Q verschwindet für die entgegengesetzten Werte: $v = v_1$, $v = v_2 - v_1$ und $v = -v_2$. Da außerdem die Zähler gleich 1 werden für $v=0$, so ist $-Q$ die Funktion von v, in die P durch die Vertauschung von v mit $-v$ übergeht. Es ist daher $P+Q = 2\varrho$ und

$$U_1 G_{2,1} + U_2 G_{1,2} = 2L;$$

eine Gleichung, die natürlich besteht bei willkürlichen Werten von x, y, z.

Genau dasselbe gilt von dem Quotientenpaar

$$P' = \frac{F_{123} F_{456} U_7}{C^3}, \quad Q' = \frac{H_{123} H_{456}}{C^3};$$

es ist daher auch $P' + Q' = 2\varrho$ oder

$$F_{123} F_{456} U_7 + H_{123} H_{456} = 2L.$$

Wir beschränken jetzt den Punkt x, y, z auf die Fläche $L = 0$ und stellen damit die Bedingung, daß er mit seinem konjugierten zusammenfällt. Dann haben wir eine große Anzahl von Formen für die Gleichung der Fläche. Setzt man:

$$\frac{H_{123} U_1 U_2 U_3}{F_{123}} = \Phi_{123},$$

so ist, dem hingeschriebenen Ausdruck für L zufolge:

$$\Phi_{123} \Phi_{456} = - \prod_{a=1}^{7} (U_a).$$

Daraus geht hervor, da man die Indizes $1, 2, \ldots 7$ untereinander vertauschen kann, daß die Größen Φ_{123}, Φ_{124} etc. alle einander gleich sind, daß man also hat:

$$\frac{F_{\alpha\beta\gamma}}{H_{\alpha\beta\gamma}} = \frac{U_\alpha U_\beta U_\gamma}{\Phi},$$

$$\Phi^2 = - \prod_{a=1}^{7} (U_a).$$

Daneben bestehen die Gleichungen:

$$\frac{G_{\alpha,\beta}}{G_{\beta,\alpha}} = - \frac{U_\alpha}{U_\beta},$$

$$G_{\alpha,\beta} G_{\beta,\alpha} = U_{\alpha\beta}, \quad F_{\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Also ist:

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\frac{U_\alpha U_\beta U_\gamma U_{\alpha\beta\gamma}}{\Phi}}, \quad H_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\frac{\Phi U_{\alpha\beta\gamma}}{U_\alpha U_\beta U_\gamma}}, \quad G_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{- U_\alpha U_{\alpha\beta}}{U_\beta}}.$$

Zwischen $F_{167}, F_{267}, F_{367}$ besteht identisch eine lineare Relation

$$a F_{167} + b F_{267} + c F_{367} = 0.$$

Daraus folgt die nicht identische Gleichung zwischen U, A, B, C:

$$a \sqrt{U_1 U_{167}} + b \sqrt{U_2 U_{267}} + c \sqrt{U_3 U_{367}} = 0.$$

Historisch steht die letzte Fläche $L = 0$ durch vier Arbeiten von mir in Beziehung zur *Weddle*schen Fläche, der *Aronhold*schen Kurve und der *Bertini*schen; meine Fläche verhält sich zur *Weddle*schen, wie *Bertini*s Kurve zu der von *Aronhold*.

Aus der ersten Untersuchung (I.) läßt sich der Schluß ziehen, daß die Gleichung $L^2 = M(X, Y, Z)$ rational aufgelöst werden kann, auch wenn M eine beliebig gegebene ganze homogene Funktion vierten Grades von X, Y, Z bedeutet. Die Lösung besteht im allgemeinen darin, daß man für X, Y, Z homogene Funktionen dritten Grades von x, y, z setzt, die in sieben Punkten gemeinsam verschwinden, und für L eine Funktion sechsten Grades (die Funktionaldeterminante von X, Y, Z nach x, y, z) die in denselben Punkten von der zweiten Ordnung verschwindet. Ein Spezialfall ist von alters her bekannt: Die Gleichung

$$L^2 = (X+Y+Z)(Y+Z-X)(Z+X-Y)(X+Y-Z)$$

läßt die Auflösung zu:

$$\begin{aligned} X &= x(y^2+z^2), \\ Y &= y(x^2+z^2), \\ Z &= (x+y)(xy-z^2), \\ L &= 4xy(x+y)z(xy-z^2). \end{aligned}$$

Aber in ähnlicher Weise kann man zur rationalen Auflösung der Gleichung $L^2 = M$ gelangen, wenn M die allgemeine homogene Funktion vierten Grades von X, Y, Z ist. Die Gleichung der Kurve vierter Ordnung $M = 0$ läßt sich auf die Form bringen: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=0$, wo α, β, γ quadratische Funktionen von X, Y, Z sind, die in Linearfaktoren zerfallen; das heißt: M läßt sich identisch auf die Form bringen:

$$M = (\alpha+\beta-\gamma)^2 - 4\alpha\beta.$$

Die Zerlegung von α, β, γ in Linearfaktoren sei durch die Formeln gegeben:

$$\alpha = \alpha_1\alpha_{23}, \quad \beta = \alpha_2\alpha_{31}, \quad \gamma = \alpha_3\alpha_{12}.$$

Wir führen drei Größen x, y, z ein durch die Gleichungen:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0, \quad \frac{\alpha_{23}}{x} + \frac{\alpha_{31}}{y} + \frac{\alpha_{12}}{z} = 0.$$

Sie sind linear in bezug auf X, Y, Z. Wir erhalten demnach X, Y, Z, und auch die α, proportional ganzen Funktionen dritten Grades von x, y, z; wir können sie diesen kubischen Funktionen direkt gleich setzen. Die beiden Gleichungen werden dann identisch erfüllt. — Nun hat man

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y)\left(\frac{\alpha_{23}}{x} + \frac{\alpha_{31}}{y}\right) = \alpha_3\alpha_{12},$$

oder:

$$\alpha_1\alpha_{13}\frac{x}{y} + \alpha_2\alpha_{23}\frac{y}{x} = \gamma - \alpha - \beta.$$

Daraus folgt, wenn

$$\alpha_1 \alpha_{13} \frac{x}{y} - \alpha_2 \alpha_{23} \frac{y}{x} = L$$

gesetzt wird,

$$L^2 = (\alpha + \beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta,$$

also $L^2 = M$. Hier sind X, Y, Z und L rationale Funktionen von x, y, z; die Gleichung $L^2 = M$ ist demnach rational aufgelöst.

Die identische Gleichung $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ sagt bekanntlich aus, daß die kubischen Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, und damit auch X, Y, Z, sieben gemeinsame Nullpunkte haben. Denn die Kurven dritter Ordnung $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ haben neun Schnittpunkte, von denen zwei auf der Geraden $x = 0$ liegen. — Zu den sieben Punkten $P_1, P_2, \ldots P_7$ gehören die drei:

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 0;$$
$$x = 0,\ y = 1,\ z = 0;$$
$$x = 0,\ y = 0,\ z = 1,$$

die wir mit P_1, P_2, P_3 bezeichnen. Denn aus der Identität

$$\alpha_{23} yz + \alpha_{31} zx + \alpha_{12} xy = 0$$

folgt, daß α_{23} durch x, α_{31} durch y, α_{12} durch z teilbar ist. Für $y = 0$, $z = 0$ verschwinden demnach α_{31} und α_{12}; ebenso α_1, und damit auch X, Y, Z.

α_1 verschwindet sogar im Punkte P_1 von der zweiten Ordnung, wie man sieht, wenn man die identische Gleichung $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ differenziert. Es ist daher α_1 im wesentlichen identisch mit der Funktion U_1, α_2 mit U_2, α_3 mit U_3. $x = 0$ ist die Verbindungslinie von P_2 und P_3. Es ist daher x identisch mit F_{23}, y mit F_{31}, z mit F_{12}. Da α_{23} durch $x = F_{23}$ teilbar ist, so ist α_{23} die Funktion U_{23}, α_{31} ist U_{31}, α_{12} ist U_{12}.

Der Ausdruck von L wird daher:

$$L = U_1 G_{13} F_{23} - U_2 G_{23} F_{13},$$

und das ist eine der Spezialformen der *Aronhold*schen Funktion.

Mit der hier behandelten Aufgabe hängen andere zusammen. Zunächst sage ich, was trivial ist: Die Gleichung $F(X, Y, Z) = 0$ eines Kegelschnitts in homogenen Koordinaten wird rational aufgelöst, indem man für X, Y, Z homogene quadratische Funktionen von x, y setzt. Diese sind gar keiner beschränkenden Bedingung unterworfen.

Nimmt man dagegen vier linear-unabhängige homogene quadra-

tische Funktionen von drei Variabeln x, y, z an, so besteht zwar zwischen diesen vier Größen X, Y, Z, U sicher eine homogene Gleichung, die Gleichung einer Fläche. Soll aber diese Fläche nur von der zweiten Ordnung sein, so müssen die vier Funktionen zwei gemeinsame Nullpunkte P_1, P_2 haben. Man denke sich X, Y, Z, U so gewählt. Dann sind die zehn Größen $X^2, XY, \ldots U^2$ homogene Funktionen vierten Grades von x, y, z, die in den beiden Punkten von der zweiten Ordnung verschwinden. Die Anzahl der linear-unabhängigen Funktionen dieser Art ist

$$\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} - 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 9;$$

also besteht zwischen $X^2, XY, \ldots U^2$ identisch eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten und man hat den Satz: Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung wird rational aufgelöst, indem man für die vier Koordinaten homogene quadratische Funktionen von x, y, z setzt, die zwei gemeinsame Nullpunkte haben.

Wir gehen über zu den homogenen Funktionen dritten Grades von x, y, z, die in sechs nicht auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_6$ gemeinsam verschwinden. Es lassen sich vier linear-unabhängige aufstellen: X, Y, Z, U.

Die Anzahl der linear-unabhängigen homogenen Funktionen neunten Grades von x, y, z, die in den sechs Punkten von der dritten Ordnung verschwinden, ist

$$\frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 2} - 6 \cdot \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 19.$$

Zu ihnen gehören die zwanzig: $X^3, X^2 Y, \ldots U^3$; also muß zwischen diesen zwanzig eine lineare Gleichung bestehen. Die Gleichung der Fläche dritter Ordnung wird aufgelöst, indem man für die vier Koordinaten kubische Funktionen von x, y, z mit sechs gemeinsamen Nullpunkten setzt. Direkt gelangt man zu dieser Auflösung auf folgende Weise.

Es sei eine Fläche dritter Ordnung definiert durch die homogene Gleichung $\psi = 0$ zwischen den Tetraeder-Koordinaten p, q, r, s; es werde die Aufgabe gestellt, zwei rationale Funktionen x und y von $\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s}$ zu bestimmen, durch die sich umgekehrt die drei Quotienten rational ausdrücken lassen. Es kommt darauf an, unter den unendlich vielen Lösungen, die die Aufgabe zuläßt, die einfachste zu finden.

Wir nehmen mit dem Ausdruck ψ eine Umformung vor, indem wir p, q, r, s als ganz unabhängige Variable auffassen. Es werde, willkürlich, irgend ein Punkt P_0 der Fläche $\psi = 0$ gewählt; nun bestimmen wir vier lineare homogene Funktionen von p, q, r, s, von denen die drei ersten, X, Y, Z, in P_0 verschwinden, während die letzte, U, in P_0 nicht verschwindet. Dann fällt, wenn wir ψ als Polynom in X, Y, Z, U darstellen, das Glied mit U^3 fort. ψ wird eine in bezug auf U quadratische Funktion, die wir mit $\psi(U)$ bezeichnen:

$$\psi(U) = FU^2 + 2GU + H;$$

die Koeffizienten F, G, H sind homogene Funktionen von X, Y, Z, vom ersten, zweiten und dritten Grade. Nun ist

$$F\psi(U) = (FU + G)^2 - (G^2 - FH),$$

und $G^2 - FH$ eine homogene Funktion vierten Grades von X, Y, Z. $G^2 - FH = 0$ definiert eine ebene Kurve vierter Ordnung und $F = 0$ eine ihrer 28 Doppeltangenten. Indem man noch fünf andere Doppeltangenten hinzunimmt, läßt sich die Gleichung der Kurve, irrational, so darstellen:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} = 0,$$

wo α, β, γ Produkte je zweier linearen Funktionen von X, Y, Z sind und einer der sechs Linearfaktoren mit F identisch ist. Das führt bei unabhängigen Werten von X, Y, Z zur Darstellung von $G^2 - FH$ als Norm von $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$:

$$G^2 - FH = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma.$$

Der Faktor F sei in α enthalten. Dann geht aus dieser Darstellung hervor, daß $G^2 - (\beta - \gamma)^2$, und demnach $G + \beta - \gamma$ oder $G - (\beta - \gamma)$ durch F teilbar ist. Wir nehmen die Reihenfolge der Größen α, β, γ so an, daß $G - (\beta - \gamma)$ durch F teilbar ist. Da auch α den Faktor F enthält, so dürfen wir setzen:

$$\alpha + \beta - \gamma = FD + G$$
$$-\alpha + \beta - \gamma = FE + G,$$

wo nun D und E ebenso wie F lineare homogene Funktionen von X, Y, Z sind. Indem man subtrahiert, ergibt sich:

$$2\alpha = F(D - E),$$

es ist also F der eine, $\frac{1}{2}(D - E)$ der andere Faktor von α.

Nun haben wir

$$F\psi(D) = (FD+G)^2 - (G^2 - FH),$$
$$FD+G = \alpha+\beta-\gamma$$
$$G^2 - FH = (\alpha+\beta-\gamma)^2 - 4\alpha\beta.$$

Es ist demnach $F\psi(D)$ gleich $4\alpha\beta$, und da 2α gleich $F(D-E)$ ist, so ergibt sich:

$$2\beta = \frac{\psi(D)}{D-E}.$$

Ganz ebenso:

$$2\gamma = \frac{\psi(E)}{D-E}.$$

Wir führen die rationale Funktion ein:

$$R(U) = \frac{\psi(U)}{(U-D)(U-E)}.$$

Sie läßt sich zerlegen in:

$$F + \frac{\psi(D)}{(U-D)(D-E)} + \frac{\psi(E)}{(U-E)(E-D)}.$$

Es ist daher:

$$R(U) = \frac{2\alpha}{D-E} + \frac{2\beta}{U-D} + \frac{2\gamma}{E-U}.$$

Jetzt zerlegen wir die quadratischen Funktionen α, β, γ in ihre Linearfaktoren:

$$\alpha = \xi\xi', \qquad \beta = \eta\eta', \qquad \gamma = \zeta\zeta';$$

dabei ist:

$$\xi = F, \qquad \xi' = \tfrac{1}{2}(D-E),$$

und man hat:

$$R(U) = \frac{2\xi\xi'}{D-E} + \frac{2\eta\eta'}{U-D} + \frac{2\zeta\zeta'}{E-U}.$$

Da $2\xi' = D-E$ ist, so ist das erste Glied mit ξ identisch.

Wir verstehen nun unter x eine beliebige Konstante, unter y und z die Quotienten linearer Funktionen von X, Y, Z, U:

$$y = \frac{2x\eta'}{U-D}, \qquad z = \frac{2x\zeta'}{E-U}.$$

Dann ist:

$$xR(U) = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

und außerdem:

$$yz\xi' + zx\eta' + xy\zeta' = 0,$$

was durch Addition der Gleichungen

$$U-D=\frac{2x\eta'}{y}, \qquad E-U=\frac{2x\zeta'}{z}, \qquad D-E=2\xi'$$

folgt. Das sind identische Beziehungen. Wenn wir aber den Punkt (p, q, r, s) auf die Fläche dritter Ordnung beschränken, indem wir $\psi(U)$ und damit auch $R(U)$ gleich 0 setzen, so haben wir die beiden Gleichungen

$$x\xi+y\eta+z\zeta=0,$$
$$yz\xi'+zx\eta'+xy\zeta'=0.$$

Die erste ist, wenn wir die Ausdrücke von y, z berücksichtigen, die Gleichung der Fläche, die zweite ist eine Identität.

In den Ausdrücken links sind $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ lineare homogene Funktionen von X, Y, Z; demnach lassen sich die beiden Gleichungen darstellen als lineare zwischen X, Y, Z, deren Koeffizienten von x, y, z abhängen. Löst man sie auf, so ergeben sich X, Y, Z, und damit auch $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', D, E, F$, proportional homogenen ganzen Funktionen dritten Grades von x, y, z; wir setzen sie diesen kubischen Funktionen einfach gleich, da es auf den gemeinsamen Faktor nicht ankommt. Die beiden Gleichungen werden dadurch identisch erfüllt. Aus der zweiten folgt, daß η' durch y, ζ' durch z teilbar ist, aus der ersten, daß ξ, η, ζ, also auch X, Y, Z, sieben gemeinsame Nullpunkte haben.

Auch U ist eine ganze kubische Funktion von x, y, z; denn es ist

$$U=D+\frac{2\eta' x}{y}=E-\frac{2\zeta' x}{z},$$

und es ist η' durch y, ζ' durch z teilbar. D, E, η' und ζ' verschwinden in den sieben Punkten; es verschwinden dort also auch yU und zU. U selbst kann nicht in allen sieben verschwinden, sonst wäre es linear in X, Y, Z. Demnach hat U sechs Nullpunkte mit X, Y, Z gemeinsam. Im siebenten Punkte ist $yU=0$, $zU=0$, U aber von 0 verschieden, also $y=0$, $z=0$.

Da die ursprünglichen Koordinaten p, q, r, s sich linear durch X, Y, Z, U ausdrücken lassen, so ist hiermit bewiesen:

Die Gleichung der Fläche dritter Ordnung in homogenen Koordinaten wird rational aufgelöst, indem man für die Koordinaten homogene kubische Funktionen von x, y, z setzt, die sechs gemeinsame Nullpunkte besitzen.

Die Herstellung geschlossener singularitätenfreier algebraischer Flächen von beliebig hohem Zusammenhang.

Von Herrn *Ladislaus Gasiorowski* in Krakau.

In seinen Seminarübungen hat Herr Prof. *Schlesinger* es als wünschenswert bezeichnet, Beispiele von singularitätenfreien geschlossenen algebraischen Flächen aufzustellen, die eine vorgeschriebene Zusammenhangszahl $2p+1$ aufweisen und auf diese Weise für ein beliebiges p in ähnlichem Sinne als Normalflächen angesprochen werden können, wie der gemeine Rotationstorus mit kreisförmigem Querschnitt für $p=1$.

Ich lege hier ein solches Beispiel vor, indem ich in der Nr. I den folgenden allgemeinen Satz beweise:

Ist p eine beliebige ganze positive Zahl, so existiert immer eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende geschlossene und im reellen Gebiete singularitätenfreie algebraische Fläche $(2p+2)$-ter Ordnung. Sie kann von Cassinischen Kurven erzeugt werden.

Für $p=2$ habe ich ein Modell der entsprechenden algebraischen Fläche sechster Ordnung im Mathem. Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt unter der Leitung des Herrn Professors *Wiener* angefertigt*); ich gebe in der Nr. II die diesem Modell zugrunde liegenden Formeln als einfache Anwendung der allgemeinen Theorie.

I.

Eine Fläche von der verlangten Beschaffenheit wird hergestellt sein, wenn es gelingt, in der Gleichung

*) In Draht ausgeführt wurde dieses Modell von dem Mechaniker *H. Sulzmann* in Darmstadt; es wird mit einer erläuternden Abhandlung in der *Wiener*schen Sammlung Mathematischer Modelle (bei B. G. Teubner) erscheinen.

(1.) $$(y^2+z^2+c^2)^2-4c^2y^2=a^4,$$

die eine *Cassini*sche Kurve darstellt, die Parameter c, a als Funktionen von x^2,

$$c=\varphi(x^2), \quad a=\psi(x^2),$$

so zu bestimmen, daß diese Funktionen den folgenden Bedingungen genügen:

I) In dem Intervall $0 \leqq x^2 \leqq r^2$ sind sie eindeutig und stetig, und es ist

$$\varphi(r^2)=\psi(r^2)=0.$$

II) Sind $x_1^2, x_2^2, \dots x_p^2$ p geeignete voneinander verschiedene Werte, welche die Ungleichungen

$$0<x_1^2<x_2^2\cdots<x_p^2<r^2$$

befriedigen, so soll sein

(2.) $$|\varphi(x_i^2)|=|\psi(x_i^2)|.$$

Diese Bedingungen kann man dadurch zu erfüllen versuchen, daß man setzt

(3.) $$\left\{\begin{array}{c} c^2=\alpha^2-\beta^2x^2, \\ a^4=(\alpha^2-\beta^2x^2)(\alpha_p x^{2p}+\alpha_{p-1}x^{2(p-1)}+\cdots+\alpha_1x^2+\alpha_0) \end{array}\right\}.$$

Die Parameter $\alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_p, \alpha, \beta$ müssen so bestimmt werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

A) $$f(x^2)=\alpha_p x^{2p}+\cdots+\alpha_1x^2+\alpha_0>0$$

für alle Werte von x^2.

B) Die Gleichung für x^2

$$F(x^2)=\alpha_p x^{2p}+\cdots+\alpha_1x^2+\alpha_0+\beta^2x^2-\alpha^2=0$$

besitzt p voneinander verschiedene positive Wurzeln, die sämtlich in dem Intervall $\left(0, \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$ liegen.

Man setze $r^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ und bezeichne ferner mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p$ p voneinander verschiedene positive Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, so daß also

$$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\cdots<\varepsilon_p<1.$$

Endlich setze man

$$x_1^2=\varepsilon_1r^2, \quad x_2^2=\varepsilon_2r^2, \dots x_p^2=\varepsilon_pr^2.$$

Wählt man dann

$$F(x^2)=\alpha_p(x^2-\varepsilon_1r^2)(x^2-\varepsilon_2r^2)\cdots(x^2-\varepsilon_pr^2),$$

so wird die Bedingung B) erfüllt. Soll auch die Bedingung A) erfüllt sein, so müssen die Größen $\alpha_p, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_p, \alpha^2, \beta^2$ so bestimmt werden, daß die Ungleichung

(4.) $f(x^2) = F(x^2) + \alpha^2 - \beta^2 x^2 = \alpha_p (x^2 - \varepsilon_1 r^2) \cdots (x^2 - \varepsilon_p r^2) + \alpha^2 - \beta^2 x^2 > 0$

für alle Werte von x^2 besteht. Man kann beweisen, daß diese Bestimmung stets möglich ist.

Zunächst muß sein $\alpha_p > 0$. Für Werte von x^2, die der Ungleichung $x^2 < \varepsilon_p r^2$ genügen, ist ferner

$$|x^2 - \varepsilon_1 r^2| < \varepsilon_p r^2, \ldots |x^2 - \varepsilon_p r^2| < \varepsilon_p r^2,$$

$$|(x^2 - \varepsilon_1 r^2)(x^2 - \varepsilon_2 r^2) \cdots (x^2 - \varepsilon_p r^2)| < \varepsilon_p^p r^{2p}.$$

Die Ungleichung (4.) wird also für $x^2 < \varepsilon_p r^2$ erfüllt, wenn

$$\alpha_p \varepsilon_p^p r^{2p} < \alpha^2 - \beta^2 \varepsilon_p r^2$$

oder

(5.) $$\alpha_p \varepsilon_p^p \alpha^{2(p-1)} < \beta^{2p} (1 - \varepsilon_p).$$

Für $\varepsilon_p r^2 \leqq x^2 \leqq r^2$ ist $F(x^2) > 0$. Im Falle $x^2 > r^2$ möge gesetzt werden

$$x^2 = r^2 (1 + \xi) \qquad \xi > 0.$$

Dann ergibt die Ungleichung (4.)

$$\alpha_p r^{2p} (1 + \xi - \varepsilon_1) \cdots (1 + \xi - \varepsilon_p) > \alpha^2 \xi$$

oder

(6.) $$\alpha_p \alpha^{2(p-1)} (1 + \xi - \varepsilon_1) \cdots (1 + \xi - \varepsilon_p) > \beta^{2p} \xi \qquad (\xi > 0).$$

Die Ungleichung (6.) muß für alle positiven Werte von ξ bestehen. Für $\xi = 1$ nimmt sie die Form

$$\alpha_p \alpha^{2(p-1)} (2 - \varepsilon_1) \cdots (2 - \varepsilon_p) > \beta^{2p}$$

an. Diese wird für alle Werte von $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p$ im Intervall $(0, 1)$ bestehen, wenn angenommen wird

(7.) $$\alpha_p \alpha^{2(p-1)} \geqq \beta^{2p}.$$

Für $\xi > 1$ wird dann die Ungleichung (6.) stets auch erfüllt, da dann

$$(1 + \xi - \varepsilon_1) \cdots (1 + \xi - \varepsilon_p) > \xi^p > \xi, \qquad p > 1.$$

Ist die Ungleichung (7.) befriedigt, so zieht die Ungleichung

(8.) $$(1 + \xi - \varepsilon_1)(1 + \xi - \varepsilon_2) \cdots (1 + \xi - \varepsilon_p) > \xi$$

die Ungleichung (6.) nach sich. Es bleibt also noch übrig zu beweisen, daß die Ungleichung (8.) durch geeignete Wahl der Zahlen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p$ im Intervall $(0, 1)$ für alle Werte $0 < \xi < 1$ befriedigt werden kann. Die letztere Ungleichung wird aber sicher befriedigt, wenn man ε_p so wählt, daß

$$(1 + \xi - \varepsilon_p)^p > \xi$$

für alle Werte von ξ zwischen 0 und 1. Dies wird der Fall sein, wenn

(9.) $$(p + 1 - \varepsilon_p)(1 - \varepsilon_p)^{p-1} > 1.$$

Die Größen $\alpha_p, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p, \alpha^2, \beta^2$ lassen sich also so bestimmen, daß die Ungleichung (4.) für alle Werte von x^2 besteht. Die Bedingungen

(5.), (7.), (9.), die zu erfüllen sind, sind nämlich miteinander verträglich, weil sie für einen hinreichend kleinen Wert von ε_p sicher erfüllt sind. Damit ist bewiesen, daß sich auch die Bedingungen I), II) stets befriedigen lassen.

Die Gleichung der gesuchten Fläche lautet

$$f(x, y, z) = (y^2 + z^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2 x^2)\{2(y^2 - z^2) + \gamma^2 (x^2 - \varepsilon_1 r^2)(x^2 - \varepsilon_2 r^2) \cdots (x^2 - \varepsilon_p r^2)\} = 0.$$

Darin ist $r^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $\gamma^2 = \alpha_p$; die ε_i sind positive Zahlen zwischen 0 und 1. Die Konstanten $\alpha_p, \alpha^2, \beta^2, \varepsilon_i$ sind so zu wählen, daß für alle Werte von x^2 die Ungleichung

$$\alpha_p (x^2 - \varepsilon_1 r^2) \cdots (x^2 - \varepsilon_p r^2) + \alpha^2 - \beta^2 x^2 > 0$$

besteht.

Daß die gefundene Fläche die verlangte Gestalt hat, folgt aus der Art ihrer Herstellung. Es bleibt nur übrig zu beweisen, daß sie im reellen Gebiete singularitätenfrei ist.

Es zeigt sich zunächst, daß die partiellen Ableitungen f_y, f_z von f nur für $y = z = 0$ beide verschwinden können. Für f_x bekommt man

$$(f_x)_{y=z=0} = 2x\{\beta^2(\alpha_p x^{2p} + \cdots + \alpha_1 x^2 + \alpha_0) - (\alpha^2 - \beta^2 x^2)[p\alpha_p x^{2(p-1)} + \cdots + \alpha_1 + 2\beta^2]\}.$$

Andererseits ergibt die Gleichung der Fläche für $y = z = 0$

$$(\alpha^2 - \beta^2 x^2)[\alpha^2 - \beta^2 x^2 - (\alpha_p x^{2p} + \cdots + \alpha_1 x^2 + \alpha_0)] = 0.$$

Für $\alpha^2 - \beta^2 x^2 = 0$ ist

$$(f_x) = 2x\beta^2(\alpha_p x^{2p} + \cdots + \alpha_1 x^2 + \alpha_0) > 0,$$

da die Bedingung A) erfüllt sein soll. Für

$$\alpha_p x^{2p} + \cdots + \alpha_1 x^2 + \alpha_0 = \alpha^2 - \beta^2 x^2, \qquad \alpha^2 - \beta^2 x^2 \neq 0$$

ergibt sich

$$(f_x) = -2x(\alpha^2 - \beta^2 x^2)[p\alpha_p x^{2(p-1)} + \cdots + \alpha_1 + \beta^2].$$

Da der Punkt $x = y = z = 0$ der betrachteten Fläche nicht angehört und die Gleichung

$$\alpha_p x^{2p} + \cdots + \alpha_1 x^2 + \alpha_0 + \beta^2 x^2 - \alpha^2 = 0$$

nach der Voraussetzung p voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, so kann der Ausdruck

$$p\alpha_p x^{2(p-1)} + \cdots + \alpha_1 + \beta^2$$

für diejenigen Punkte der Fläche, welche auf der x-Achse liegen, nicht verschwinden.

Damit ist bewiesen, daß die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_z in keinem reellen Punkte unserer Fläche alle drei verschwinden können, daß also diese Fläche im reellen Gebiete singularitätenfrei ist.

II.

Um für die Ausführung des Modells günstige Maße zu erzielen, setze ich für $p=2$, etwas abweichend von den allgemeinen Formeln, in der Gleichung (1.) der Nr. I

$$(1.)\qquad c^2=\beta^2(\alpha^2-x^2),\ a^4=\beta^2(\alpha^2-x^2)(\alpha_2x^4+\alpha_1x^2+\alpha_0).$$

Die Gleichung $a^4=c^4$ muß für x^2 zwei zwischen 0 und α^2 liegende Lösungen ergeben. Bezeichnet man also mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ zwei Zahlen, die zwischen 0 und 1 liegen, so muß sein

$$(4.)\quad\begin{cases}\alpha_2x^4+(\alpha_1+\beta^2)x^2+\alpha_0-\alpha^2\beta^2=\alpha_2(x^2-\varepsilon_1\alpha^2)(x^2-\varepsilon_2\alpha^2),\\ \alpha_1+\beta^2=-\alpha_2\alpha^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2);\ \alpha_0-\alpha^2\beta^2=\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^4,\\ \alpha_0=\alpha^2\beta^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^4\alpha_2;\ -\alpha_1=\beta^2+\alpha^2\alpha_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2).\end{cases}$$

Außerdem muß sein

$$(5.)\qquad \alpha_2\alpha_0-\frac{1}{4}\alpha_1^2>0,$$

da a^4 außer für $x^2=\alpha^2$ von Null verschieden sein muß, und $\alpha_0>\alpha^2\beta^2$, da für $x=0$ $a>c$ sein soll; daher ist $\alpha_2>0$. Setzt man

$$(6.)\qquad \alpha_2=\gamma^2,$$

so folgt

$$(7.)\qquad \alpha_0=\alpha^2\beta^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^4\gamma^2;\ -\alpha_1=\beta^2+\alpha^2\gamma^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

Die Bedingung (5.) oder $4\alpha_0\gamma^2>\alpha_1^2$ ergibt

$$(8.)\qquad \beta^4+\alpha^4\gamma^4(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2<2\alpha^2\beta^2\gamma^2(2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

und die Gleichung der gesuchten Fläche lautet

$$(9.)\quad (y^2+z^2)^2-\beta^2(\alpha^2-x^2)[2(y^2-z^2)+\gamma^2(x^2-\varepsilon_1\alpha^2)(x^2-\varepsilon_2\alpha^2)]=0.$$

Wählt man nun insbesondere

$$16\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha^2\gamma^2=9\beta^2,$$

was für die Modellanfertigung vorteilhaft ist, so ergibt sich für $x=0$: $a^2=\frac{5}{4}c^2$ und die Bedingung (8.) nimmt die Form an:

$$16^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2+9^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-2\cdot9\cdot16\varepsilon_1\varepsilon_2(2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)\leqq0.$$

Sie wird z. B. für $\varepsilon_1=\left(\frac{3}{8}\right)^2$, $\varepsilon_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$ befriedigt.

Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale.

Von Herrn *Robert König* in Tübingen.

Einleitung.

Neben die algebraischen Funktionen und deren Integrale treten als nächst einfachste die sogenannten multiplikativen Funktionen und deren Integrale, d. h. Funktionen, welche auf der einem algebraischen Gebilde $f(xy)=0$ zugehörigen *Riemann*schen Fläche R vom Geschlecht p nicht mehr eindeutig, sondern in der Weise vieldeutig sind, daß zwischen zwei Zweigen y_1, y_2 Relationen der Form

$$y_2=\mu y_1 \text{ bzw. } y_2=\mu y_1+\nu \qquad (\mu, \nu \text{ Konstanten})$$

bestehen.

Die multiplikativen Funktionen können unverzweigt und verzweigt sein. Im ersteren Fall — sogenannte *Prym*sche Funktionen — besitzen sie relativ zu R überall den Charakter rationaler Funktionen. Diesen Fall habe ich in einer früheren Arbeit*) im Anschluß an die von *Hensel* und *Landsberg***) für die algebraischen Funktionen entwickelten Methoden untersucht. Hier soll eine Weiterbildung der arithmetischen Theorie auf die verzweigten Funktionen und deren Integrale (Differentiale) gegeben werden, welche die unverzweigten als speziellen Fall unter sich begreift.

*) Zur arithmetischen Theorie der auf einem algebraischen Gebilde existierenden Funktionen, Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse Bd. 63 (1911) S. 348—368 — im folgenden kurz „A. Th." zitiert.

**) Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902 — im folgenden kurz „*H.-L.*" zitiert.

Unter einer (relativ zu R) verzweigten Funktion y verstehen wir hierbei eine solche, welche an jeder Stelle von R eine Entwicklung der Form

$$y = t^{\alpha}\mathfrak{P}(t),\ \mathfrak{P}(0) \neq 0$$

besitzt, wobei t eine Ortsuniformisierende, α eine reelle oder komplexe Zahl, $\mathfrak{P}(t)$ eine reguläre Potenzreihe bedeutet.

Es wird also in unserer arithmetischen Erkenntnis der Schritt von den algebraischen Funktionen (und Abelschen Integralen) zu den Lösungen der homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Fuchsschen Typus (und deren Integralen) gemacht.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile. Im ersten gehen wir von den einfachsten Elementen, aus denen die *Riemann*sche Fläche besteht, ihren Punkten, aus und denken uns denselben Zahlen, „Exponenten", zugeordnet. Diese Aggregate von Punkten mit Exponenten, „Divisoren" genannt, werden vermöge der fundamentalen arithmetischen Prinzipien in Ordnungen, Gattungen und Klassen eingeteilt. Für jede der neuen Mannigfaltigkeiten läßt sich eine Multiplikation definieren, bei welcher die Ordnungen, Gattungen und Klassen jeweils eine kontinuierlich unendliche *Abelsche Gruppe* bilden.

Im zweiten Teil handelt es sich um die Herstellung des Zusammenhangs mit den eingangs erwähnten Funktionen. Jedem Divisor der Ordnung 0 bzw. $2p-2$ entspricht eine multiplikative Funktion bzw. ein solches Differential und umgekehrt — wobei die Einführung des Begriffs einer „*primären*" Funktion von größter Wichtigkeit ist. Es herrscht ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen dem oben rein arithmetisch eingeführten Klassen- bzw. Gattungsbegriff von Divisoren der Ordnungen 0 und $2p-2$ und dem transzendenten (*Riemann*schen) Begriff der Klasse bzw. Gattung von multiplikativen Funktionen und Differentialen.

Der Zusammenhang zwischen beiden wird durch das *allgemeine Abelsche Theorem* (§ 7) vermittelt, welches das bekannte Theorem über die algebraischen und unverzweigten Funktionen als Spezialfall enthält. Die im ersten Abschnitt eingeführten Gruppen ergeben zum Teil Gruppen von Funktionen-Gattungen bzw. -Klassen, deren Charaktere im Falle reeller Verzweigtheit eine sehr anschauliche Bedeutung erhalten. Einzelne Untergruppen werden angegeben.

Der 3. Teil bringt eine arithmetische Untersuchung der verzweigten

Divisorenklassen der Ordnungen 0 und $2p-2$, auf welche die Theorie der multiplikativen Funktionen und Differentiale im wesentlichen zurückkommt. Es mußte vor allem der Begriff des Multiplums eines Divisors in sinngemäßer Weise von den unverzweigten auf die verzweigten Divisoren erweitert werden. Das führt dann zu dem *allgemeinen Riemann-Rochschen Theorem* (§ 11), welches die bekannten Theoreme über die algebraischen und unverzweigten Funktionen und deren Integrale als Spezialfall enthält, sowie zu zwei neuen *Reziprozitätstheoremen* über die Funktionen bzw. die Differentiale zweier zueinander reziproker Klassen. Das letztere kann als die Verallgemeinerung des *Brill-Noether*schen Reziprozitätssatzes bei den algebraischen Funktionen angesehen werden. Als Folgerung wird in § 12 die Anzahl der überall endlichen Differentiale einer Klasse bestimmt, sowie in großer Kürze die Existenz der Elementardifferentiale angezeigt, wobei der Unterschied von gewöhnlichen und Ausnahmeklassen hervortritt.

Was die vorhandene Literatur betrifft, so hat die unverzweigten multiplikativen Funktionen und ihre Integrale als Erster Herr *F. Prym* zum Gegenstand selbständiger Untersuchungen gemacht*), welche nunmehr in dem Werk: Theorie der *Prym*schen Funktionen 1. Ordnung von *F. Prym* und *G. Rost*, Leipzig 1911 ausführlich vorliegen**); sodann *P. Apell****), während Herr *A. Hurwitz* verzweigte Funktionen und ihre Anwendungen in Betracht zieht†). Eine ausführliche Theorie der multiplikativen *Formen* hat *E. Ritter* entwickelt††). Das von mir aufgestellte verallgemeinerte *Riemann-Roch*sche Theorem (25.) enthält das *Ritter*sche sowie die Sätze bei *Hurwitz* als Spezialfall†††). Erwähnt sei noch der Abschnitt über

---

*) Dieses Journal, Bd. 70, 71, 73; abgedruckt in dem zitierten Werk.

**) Im folgenden kurz „*Prym-Rost*“ zitiert.

***) Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs etc. Acta math. Bd. 13.

†) Über *Riemann*sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math. Ann. 39; über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. 41; zur Theorie der *Abel*schen Funktionen, Gött. Nachr. 1892, S. 247—254.

††) Die multiplikativen Formen auf algebraischem Gebilde etc., Math. Ann. 44 (1894) S. 261—374 — im folgenden kurz „*Ritter*“ zitiert.

†††) Des Genaueren s. hierüber die Anmerkungen auf S. 181, 182, 183.

multiplikative Funktionen in dem vortrefflichen Buch von *H. Weyl*, Die Idee der *Riemann*schen Fläche, § 17.

I. Kapitel. Allgemeine Theorie der Divisoren.

§ 1. Vorbemerkungen.

Wir betrachten eine gegebene *Riemann*sche Fläche R vom Geschlecht p als Punktgebilde und studieren, unbehindert durch jedes analytische Beiwerk, zunächst die Aggregate von Punkten auf ihr. Es kommen dabei dieselben Prinzipien, die uns in der Arithmetik Licht und Orientierung verschaffen, zur Anwendung.

Einen Ausdruck der Form

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\dots\mathfrak{P}_n^{\alpha_n},$$

wo die $\mathfrak{P}_i (i = 1, 2, \dots n)$ Punkte auf R und die α_i reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, nennen wir — in Verallgemeinerung der Terminologie von *Hensel* und *Landsberg**) — einen „*Divisor*“. α_i heißt der zum Punkt $\mathfrak{P}_i$ gehörige *Exponent*, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = g$ die *Ordnung* des Divisors $\mathfrak{P}$. Zwei Divisoren gelten als *gleich*, wenn beide aus denselben Punkten bestehen und die Summe der zu jedem Punkt gehörigen Exponenten beidemal gleich ist, z. B.

$$\mathfrak{P}_1^{\frac{1}{2}}\mathfrak{P}_2^{1} = \mathfrak{P}_1^{-1}\mathfrak{P}_2^{1}\mathfrak{P}_1^{\frac{3}{2}}.$$

Der Exponent 1 kann auch weggelassen werden: $\mathfrak{P}^1 = \mathfrak{P}$; hingegen werde unter $\mathfrak{P}^0$ 1 verstanden. Für zwei Divisoren

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\dots\mathfrak{P}_m^{\alpha_m}, \qquad \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\beta_1}\dots\mathfrak{P}_m^{\beta_m}\dots\mathfrak{P}_n^{\beta_n}$$

kann man eine *Multiplikation* definieren, ganz so wie für die in ihre Primfaktoren zerlegten natürlichen Zahlen. Die Ordnung des *Produkts*

$$\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots\mathfrak{P}_m^{\alpha_m+\beta_m}\dots\mathfrak{P}_n^{\beta_n}$$

ist gleich der Summe der Ordnungen der Faktoren.

Zwei Divisoren, deren Produkt gleich 1 ist, nennen wir einander *entgegengesetzt*. Ein Divisor, dessen Exponenten sämtlich ganze Zahlen sind, heißt *unverzweigt*, sonst *verzweigt*. Ein verzweigter Divisor $\mathfrak{P}$ wird im allgemeinen auf unendlich verschiedene Arten als ein Produkt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v\cdot\mathfrak{P}_u$$

---

*) Vgl. „*H.-L.*“ 10. Vorlesung.

dargestellt werden können, worin $\mathfrak{P}_u$ ein unverzweigter Divisor ist, $\mathfrak{P}_v$ dagegen die und nur die Punkte enthält, deren Exponenten nicht ganze Zahlen sind, z. B. $\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}} \cdot 1 = \mathfrak{P}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{P}^{-1}$ usw. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, *setzen wir ein für allemal fest, daß für einen in* $\mathfrak{P}_v$ *vorkommenden Exponenten* α

$$0 \leqq \Re \alpha < 1$$

*sein soll**). *„Reduzierte Exponenten."* Das Gleichheitszeichen kann hierbei offenbar nur für rein imaginäre Exponenten statthaben. Wir nennen alsdann $\mathfrak{P}_v$ *den verzweigten,* $\mathfrak{P}_u$ *den unverzweigten Bestandteil* des Divisors $\mathfrak{P}$. Sind g_v, g_u die bezüglichen Ordnungen, so ist

$$g = g_v + g_u.$$

Die unverzweigten Divisoren können wir schließlich als Spezialfall der verzweigten auffassen, für welche nämlich $\mathfrak{P}_v = 1$, $g_v = 0$ ist.

§ 2. Einteilung der Divisoren in Ordnungen, Gattungen und Klassen.

Es gilt nun die wichtige Tatsache:

Die Divisoren bilden bei der Multiplikation eine kontinuierlich unendliche Abelsche Gruppe Γ_1.

Denn 1. ist das Produkt zweier Divisoren ein wohlbestimmter 3. Divisor; 2. ist die Multiplikation kommutativ und assoziativ; 3. ist sie einpaarig, wie aus der Definition der Gleichheit unmittelbar folgt; 4. existiert als Einheitselement der Divisor 1 und zu jedem Divisor ein entgegengesetzter; 5. ist ihre Mannigfaltigkeit kontinuierlich.

Uns in dieser zu orientieren, ist unsere nächste Aufgabe. Wir bemerken dazu, daß die Divisoren der Ordnung Null eine Untergruppe Γ_2 der obigen bilden. Das ermöglicht eine Einteilung der Divisoren in *„Ordnungen"*, wobei jedesmal die Divisoren gleicher Ordnung und nur diese vereint sind. Wir unterscheiden *Nebenordnungen* und die *Hauptordnung*, welche aus den Divisoren der Ordnung Null besteht. Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_u$ ein Divisor der Hauptordnung, so ist g_v wegen $g_v + g_u = 0$ stets eine positive ganze Zahl oder Null. Letzterer Fall tritt ein, wenn $\mathfrak{P}_v = 1$ ist oder die in $\mathfrak{P}_v$ vorkommenden Exponenten sämtlich rein ima-

---

*) $\Re \alpha$ bedeutet hier wie im folgenden stets: reeller Teil von α, $\Im \alpha$ stets: imaginärer Teil von α.

ginär sind und umgekehrt. Ferner kann $\mathfrak{P}_v$ nicht bloß einen Punkt enthalten, sondern mindestens zwei.

In Γ_2 steckt wieder eine Untergruppe Γ_3, bestehend aus den unverzweigten Divisoren. Vermöge dieser können wir die Divisoren einer Ordnung in „*Gattungen*“ einteilen, indem wir zwei Divisoren äquivalent nennen, wenn sie durch Multiplikation mit einem Divisor von Γ_3 auseinander hervorgehen, und äquivalente Divisoren in eine Gattung vereinigen, während nicht äquivalente in verschiedene Gattungen kommen. Die Divisoren einer Ordnung lassen sich charakterisieren durch Angabe der Zahl g, diejenigen einer Gattung durch g und den verzweigten Bestandteil $\mathfrak{P}_v$. Wir können daher erstere bezeichnen mit (g), letztere mit $(g), (\mathfrak{P}_v)$ und unterscheiden unverzweigte und verzweigte Gattungen, je nachdem $\mathfrak{P}_v = 1$ ist oder nicht. Umgekehrt ist durch Angabe von g bzw. g und $\mathfrak{P}_v$ jedesmal eine Ordnung bzw. Gattung gegeben, wofern nur $g - g_v$ eine ganze Zahl ist. Unter der *Hauptgattung* einer bestimmten *ganzzahligen* Ordnung werden wir die unverzweigten Divisoren der betreffenden Ordnung verstehen, während sich die verzweigten auf die *Nebengattungen* verteilen. Insbesondere besteht die Hauptgattung der Hauptordnung aus der Gruppe Γ_3.

In letzterer ist wieder eine Untergruppe Γ_4 enthalten, bestehend aus den *algebraischen* Divisoren, d. h. den Divisoren, welche den eindeutigen, algebraischen Funktionen auf R entsprechen*). — Falls das Geschlecht p von R gleich 0 ist, dann und nur dann ist $\Gamma_3 = \Gamma_4$. — Auf Grund von Γ_4 ist schließlich eine noch feinere Einteilung der Divisoren in „*Klassen*“ möglich, indem zwei Divisoren, die auseinander durch Multiplikation mit einem algebraischen hervorgehen, in dieselbe Klasse kommen**). Dadurch zerfällt jede Gattung in (unendlichviele) Klassen, Γ_3 insbesondere in die *Hauptklasse* Γ_4 und die übrigen *Nebenklassen*. Eine Klasse kann allgemein charakterisiert werden durch Angabe von $g, \mathfrak{P}_v$ und $\mathfrak{P}_u$, bzw. wegen $g = g_v + g_u$ durch beide letztere Symbole allein. Wir bezeichnen sie daher kurz mit P oder $(\mathfrak{P})$, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_u$ ist, die Hauptklasse $\Gamma_4 = (1)$ auch mit E. Umgekehrt ist durch Angabe von $\mathfrak{P}$ jedesmal eine Klasse gegeben.

*) Man beachte, daß ich das Wort in anderem Sinn als „*H.-L.*“ gebrauche; dort heißt jeder unverzweigte Divisor algebraisch.

**) Für die unverzweigten Divisoren vgl. „*H.-L.*“, 17. Vorlesung.

§ 3. Die Gruppe der Ordnungen, Gattungen und Klassen.

Wie in dem vorhergehenden Paragraphen die Divisoren, können wir jetzt die neugewonnenen Gebilde: Ordnungen, Gattungen, Klassen als Elemente unserer Untersuchung betrachten und mit ihnen ganz analog verfahren.

Auch für die „*Ordnungen*“ können wir eine *Komposition* definieren, indem wir unter der aus zwei durch die Zahlen g_1, g_2 angezeigten Ordnungen zusammengesetzten die durch die Zahl $g_1 + g_2$ bestimmte Ordnung verstehen. Die Divisoren-Ordnungen bilden bei dieser Komposition eine Gruppe, welche mit der Gruppe der komplexen Zahlen bei der Addition isomorph ist.

Nächstdem folgt die *Komposition der Gattungen:* Sind zwei solche durch $g, \mathfrak{P}_v$ bzw. $g', \mathfrak{P}_v'$ gegeben, so verstehen wir unter der zusammengesetzten die durch $g + g', \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_v'$ bestimmte Gattung. (Eventuell ist von $\mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_v'$ ein unverzweigter Divisor abzuspalten.) Hierbei bilden die Gattungen eine kontinuierlich unendliche *Abel*sche Gruppe. Das Einheitselement bildet die den Divisor 1 enthaltende Gattung; zu der den Divisor $\mathfrak{P}$ enthaltenden Gattung ist die mit dem Divisor $\mathfrak{P}^{-1}$ und nur diese entgegengesetzt. Die Aufstellung von Untergruppen erfolgt analog wie bei der nunmehr ausführlicher zu besprechenden *Komposition der Klassen.*

Die durch die Divisoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ charakterisierten Klassen P, Q ergeben als „Produkt“ die den Divisor $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q}$ enthaltende Klasse $P \cdot Q$. Es sei $P^1 = P, P^0 = E$. Die Klasse E läßt jede andere bei der Komposition ungeändert. Zu $(\mathfrak{P})$ oder P ist $(\mathfrak{P}^{-1})$ oder $P^{-1} = \frac{1}{P}$ entgegengesetzt. Danach lassen sich die an der Spitze von § 2 angeführten fünf Eigenschaften leicht verifizieren und ergeben den Satz:

Die Divisorenklassen bilden bei der Multiplikation eine kontinuierlich unendliche Abelsche Gruppe.

Zwecks Aufstellung von Untergruppen kann man auf zweierlei Arten verfahren, indem man von den Klasseninvarianten g und $\mathfrak{P}_v$ entweder die eine oder die andere oder beide zugleich gewissen Einschränkungen unterwirft. Zum Beispiel erhalten wir jedesmal eine Untergruppe, wenn wir die Ordnung der Klassen g reell, rational, ganzzahlig oder schließlich gleich Null annehmen. Ebenso, wenn wir nur Klassen betrachten, deren ver-

zweigter Bestandteil $\mathfrak{P}_v$ nur gegebene Punkte und diese mit Exponenten, welche komplex, reell oder nur rational sind, enthalten. Ist $\mathfrak{P}_v = 1$, so haben wir als Spezialfall *die Gruppe der unverzweigten Klassen* Γ_0.

Auf diese wichtigste Untergruppe können wir — wie für jede andere übrigens auch — eine Einteilung der Klassen gründen, indem wir — analog wie oben bei den Divisoren — zwei Klassen, die auseinander durch Multiplikation mit einer unverzweigten hervorgehen, äquivalent nennen und äquivalente Klassen in eine „*Art*" vereinigen. So erscheinen sämtliche Klassen aufgeteilt auf die *Hauptart*, bestehend aus Γ_0, und die Nebenarten, bestehend aus den verzweigten Klassen.

In Γ_0 bilden schließlich die *Klassen der Ordnung Null* eine weitere *Untergruppe* Γ, die uns in analoger Weise zur Einteilung der Arten in „*Familien*" Veranlassung gibt. In einer Familie sind dann jedesmal die Divisoren einer Gattung und nur diese vereinigt. Die Gruppe Γ habe ich bereits in einer früheren Arbeit betrachtet*). Es ist klar, daß sich sowohl hier wie in § 2 eine ganze Reihe weiterer Untergruppen aufstellen lassen und für jede derselben die allgemeinen gruppentheoretischen Fragestellungen Platz greifen.

II. Kapitel. Die verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale.

§ 4. Vorbereitendes über die *Abel*schen Integrale und daraus gebildete Funktionen.

Ziel dieses Kapitels ist die Herstellung des *Zusammenhanges zwischen dem arithmetischen und Riemannschen Klassenbegriff.*

Es soll in diesem Paragraphen zunächst die nötige Grundlage für die *transzendente* Seite unseres Problems gelegt werden.

Wir denken uns die *Riemann*sche Fläche R durch ein von einem Punkt $\mathfrak{P}_0$ auslaufendes Querschnittsystem c_h, a_h, b_h $(h = 1, 2, \ldots p)$ in kanonischer Weise zu R' zerschnitten**); jedem Schnitt wird ein Richtungssinn zugewiesen und damit rechtes und linkes (+ bzw. —) Schnittufer unterschieden; b_h überschreite a_h von rechts nach links. Zu jedem Rück-

*) „A. Th." § 2.

**) S. etwa *H. Weyl*, a. a. O. S. 76.

kehrschnittsystem a_h, b_h — kürzer a_i $(i = 1, 2, \ldots 2p)$ — gehört ein System von $2p$ reell linear unabhängigen Integralen 1. Gattung W_{a_h}, W_{b_h} — kürzer W_k $(k = 1, 2, \ldots 2p)$ —, welches in folgender transzendenter Weise normiert ist*); setzen wir

$$W_k|_{a_i^+} = W_k|_{a_i^-} + \mathfrak{A}_{ki}, \tag{1.}$$

so ist

$$\begin{aligned} \Re\mathfrak{A}_{ki} &= 1 \text{ für } k = i, \\ &= 0 \quad ,, \quad k \neq i. \end{aligned} \tag{1a.}$$

Bilden wir mittels reeller Konstanten C_k eine lineare Kombination dieser Integrale, so hat die Funktion

$$f = e^{\sum_{k=1}^{2p} C_k W_k + C} \tag{2.}$$

— C reelle Konstante — folgende Eigenschaften: 1. sie ist eine auf R analytische, überall reguläre, im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion; 2. in der zerschnittenen Fläche R' ist sie eindeutig, und für die Funktionswerte an gegenüberliegenden Ufern gilt:

$$\begin{aligned} f|a_i^+ &= e^{C_i + i\Im \sum_{k=1}^{2p} C_k \mathfrak{A}_{ki}} \cdot f|a_i^- , && (i = 1, 2, \ldots 2p) \\ f|c_h^+ &= f|c_h^- . && (h = 1, 2, \ldots p) \end{aligned} \tag{3.}$$

Umgekehrt besteht folgender, eine Verallgemeinerung des *Liouville*schen Satzes darstellender

Satz I: *Schreibt man an den $2p$ Rückkehrschnitten a_i die absoluten Beträge der „Multiplikatoren“ A_i vor, — $|A_i| \neq 0$ —, so existiert stets eine und (von einer willkürlichen multiplikativen Konstante abgesehen) nur eine Funktion f, welche die obigen Eigenschaften besitzt und deren Multiplikatoren den gegebenen absoluten Betrag haben. Sind insbesondere die absoluten Beträge sämtlich gleich 1, so wird $f = const.$*

Die Existenz einer solchen Funktion ist klar; man braucht ja nur in (2.) für C_i den Hauptwert von $\log|A_i|$ zu nehmen. Die Unität folgt leicht durch Betrachtung des $\log \frac{f}{F}$, wenn F irgend eine derartige Funktion ist.

Sei jetzt $\omega_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$ ein *Abel*sches Integral 3. Gattung mit den beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ und den bez. Residuen

*) S. *H. Weyl*, a. a. O. S. 98.

$+1$ und -1. Dasselbe sei in der Weise transzendent normiert, daß die Realteile sämtlicher Perioden Null sind. Setzen wir alsdann ($h = 1, 2, \dots p$)

$$(4.) \qquad \omega|_{a_h}^{+} = \omega|_{a_h}^{-} + \mathfrak{A}_h, \qquad \omega|_{b_h}^{+} = \omega|_{b_h}^{-} + \mathfrak{B}_h,$$

so ergibt sich*):

$$(4^a.) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_h &= \int_{b_h} d\omega_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = \quad 2\pi i\, \Re \int_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{Q}} dW_{b_h}, \\ \mathfrak{B}_h &= -\int_{a_h} d\omega_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = -2\pi i\, \Re \int_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{Q}} dW_{a_h}, \end{aligned}$$

wobei der von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$ erstreckte Integrationsweg in R' verlaufen soll.

Nun markieren wir auf R' irgend $n+1$ Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}$; zerschneiden R' in R'' durch Schnitte v_ν ($\nu = 1, 2, \dots n$), welche von $\mathfrak{P}_0$ nach $\mathfrak{P}_\nu$ hinlaufen**), versehen jeden mit einem Richtungssinn (von $\mathfrak{P}_0$ nach $\mathfrak{P}_\nu$), sodaß ein positives und ein negatives Schnittufer unterschieden werden kann und weisen schließlich jedem Punkt $\mathfrak{P}_\nu$ eine reelle oder komplexe Zahl α_ν zu, derart, daß $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 0$. Für die Funktion

$$(5.) \qquad f = e^{\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \omega_{\mathfrak{P}_\nu \mathfrak{P}}}$$

bestehen dann an den Ufern der Schnitte v, a, b folgende Relationen:

$$(6.) \qquad \begin{gathered} f|_{v_\nu}^{+} = V_\nu \cdot f|_{v_\nu}^{-}; \qquad f|_{a_h}^{+} = A_h \cdot f|_{a_h}^{-}; \qquad f|_{b_h}^{+} = B_h \cdot f|_{b_h}^{-} \\ \nu = 1, 2, \dots n; \qquad h = 1, 2, \dots, p. \end{gathered}$$

Hierbei ist nach (4^a.)

a) $V_\nu = e^{-2\pi i \alpha_\nu}$,

$$(7.) \qquad \text{b)}\ A_h = e^{2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \Re \int_{\mathfrak{P}_\nu}^{\mathfrak{P}} dW_{b_h}} = e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu)},$$

$$\text{c)}\ B_h = e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \Re \int_{\mathfrak{P}_\nu}^{\mathfrak{P}} dW_{a_h}} = e^{2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu)}.$$

Besonders bemerken wir folgendes: Sind sämtliche α_ν reell (insbesondere ganzzahlig), dann ist

$$|V_\nu| = |A_h| = |B_h| = 1 \text{ für jedes } \nu, h;$$

sind dagegen die α_ν rein imaginär, so werden sämtliche Multiplikatoren V, A, B reell und schließlich im Fall beliebiger α_ν im allgemeinen komplex;

*) S. *H. Weyl*, a. a. O. S. 115.

**) Bei einem positiven Umlauf um $\mathfrak{P}_0$ mögen die Schnitte $c_1, c_2, \dots c_p, v_1, v_2, \dots v_n$ aufeinander folgen.

der absolute Betrag derselben hängt jedoch nur von den Imaginärteilen der Exponenten α_ν ab.

§ 5. Begriff der verzweigten multiplikativen Funktion.

Wir verstehen darunter eine auf R erklärte, im allgemeinen unendlich vieldeutige analytische Funktion f von folgenden Eigenschaften*): 1. Abgesehen von einer endlichen Anzahl von Stellen $\mathfrak{P}_\sigma (\sigma = 1, 2, \dots s)$, besitzt sie überall den Charakter einer rationalen Funktion (relativ zu R). 2. In der Umgebung des Punktes $\mathfrak{P}_\sigma$ verhält sie sich wie

$$t^{\alpha_\sigma}\mathfrak{P}(t),$$

wo t eine zu $\mathfrak{P}_\sigma$ gehörige Ortsuniformisierende, α_σ eine reelle oder komplexe Zahl, $\mathfrak{P}(t)$ eine reguläre Potenzreihe mit von Null verschiedenem konstantem Glied bedeutet. Überdies sei $\sum_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma =$ ganze Zahl**). 3. Ihre Zweige sind in der (nach Art des vorigen Paragraphen) zerschnittenen Fläche R'' eindeutig. 4. Längs der Schnitte v, a, b bestehen Relationen der Form (6.), wobei $V_\sigma = e^{-2\pi i \alpha_\sigma}$ wird und A_h, B_h reelle oder komplexe von Null verschiedene Zahlen sind.

Als Spezialfall subsumieren sich darunter die *unverzweigten multiplikativen* oder *Prymschen Funktionen****), wo keine Punkte P_σ vorhanden sind und f bereits in R' eindeutig ist.

Ich nenne eine multiplikative Funktion *primär*, wenn

$$(8.)\qquad \text{a)}\quad |A_h| = e^{2\pi \sum_{\sigma=1}^{s} a''_\sigma \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\sigma)}, \qquad \text{b)}\quad |B_h| = e^{-2\pi \sum_{\sigma=1}^{s} a''_\sigma \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\sigma)}, \qquad \begin{matrix} a_\sigma = a'_\sigma + i a''_\sigma \\ h = 1, 2, \dots p. \end{matrix}$$

ist, sonst *abgeleitet*. Eine reell verzweigte oder unverzweigte multiplikative Funktion ist also primär, wenn die absoluten Beträge ihrer Multiplikatoren V, A, B gleich 1 sind. Wie man leicht verifiziert, ist *das Produkt und der Quotient zweier primären Funktionen wieder primär*. Aus einer pri-

---

*) S. *A. Hurwitz*, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. 41, S. 403—442, bes. S. 431 ff.

**) Das ergibt sich als Folge der übrigen Bedingungen; s. ebenda.

***) S. Einleitung.

$+1$ und -1. Dasselbe sei in der Weise transzendent normiert, daß die Realteile sämtlicher Perioden Null sind. Setzen wir alsdann ($h = 1, 2, \dots p$)

$$(4.) \qquad \omega|_{a_h}^{+} = \omega|_{a_h}^{-} + \mathfrak{A}_h, \qquad \omega|_{b_h}^{+} = \omega|_{b_h}^{-} + \mathfrak{B}_h,$$

so ergibt sich*):

$$(4^a.) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_h &= \int_{b_h} d\omega_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = \quad 2\pi i\, \Re \int_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{Q}} dW_{b_h}, \\ \mathfrak{B}_h &= -\int_{a_h} d\omega_{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = -\,2\pi i\, \Re \int_{\mathfrak{P}}^{\mathfrak{Q}} dW_{a_h}, \end{aligned}$$

wobei der von $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{Q}$ erstreckte Integrationsweg in R' verlaufen soll.

Nun markieren wir auf R' irgend $n+1$ Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots \mathfrak{P}_n, \mathfrak{P}$; zerschneiden R' in R'' durch Schnitte v_ν ($\nu = 1, 2, \dots n$), welche von $\mathfrak{P}_0$ nach $\mathfrak{P}_\nu$ hinlaufen**), versehen jeden mit einem Richtungssinn (von $\mathfrak{P}_0$ nach $\mathfrak{P}_\nu$), sodaß ein positives und ein negatives Schnittufer unterschieden werden kann und weisen schließlich jedem Punkt $\mathfrak{P}_\nu$ eine reelle oder komplexe Zahl α_ν zu, derart, daß $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 0$. Für die Funktion

$$(5.) \qquad f = e^{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \omega_{\mathfrak{P}_\nu \mathfrak{P}}}$$

bestehen dann an den Ufern der Schnitte v, a, b folgende Relationen:

$$(6.) \qquad \begin{gathered} f|_{v_\nu}^{+} = V_\nu \cdot f|_{v_\nu}^{-}; \qquad f|_{a_h}^{+} = A_h \cdot f|_{a_h}^{-}; \qquad f|_{b_h}^{+} = B_h \cdot f|_{b_h}^{-} \\ \nu = 1, 2, \dots n; \qquad h = 1, 2, \dots, p. \end{gathered}$$

Hierbei ist nach (4^a.)

$$\text{a)} \quad V_\nu = e^{-2\pi i a_\nu},$$

$$(7.) \qquad \text{b)} \quad A_h = e^{2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Re \int_{\mathfrak{P}_\nu}^{\mathfrak{P}} dW_{b_h}} = e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu)},$$

$$\text{c)} \quad B_h = e^{-2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Re \int_{\mathfrak{P}_\nu}^{\mathfrak{P}} dW_{a_h}} = e^{2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu)}.$$

Besonders bemerken wir folgendes: Sind sämtliche α_ν reell (insbesondere ganzzahlig), dann ist

$$|V_\nu| = |A_h| = |B_h| = 1 \text{ für jedes } \nu, h;$$

sind dagegen die α_ν rein imaginär, so werden sämtliche Multiplikatoren V, A, B reell und schließlich im Fall beliebiger α_ν im allgemeinen komplex;

---

*) S. *H. Weyl*, a. a. O. S. 115.

**) Bei einem positiven Umlauf um $\mathfrak{P}_0$ mögen die Schnitte $c_1, c_2, \dots c_p, v_1, v_2, \dots v_n$ aufeinander folgen.

der absolute Betrag derselben hängt jedoch nur von den Imaginärteilen der Exponenten α_ν ab.

§ 5. Begriff der verzweigten multiplikativen Funktion.

Wir verstehen darunter eine auf R erklärte, im allgemeinen unendlich vieldeutige analytische Funktion f von folgenden Eigenschaften*): 1. Abgesehen von einer endlichen Anzahl von Stellen $\mathfrak{P}_\sigma (\sigma = 1, 2, \dots s)$, besitzt sie überall den Charakter einer rationalen Funktion (relativ zu R). 2. In der Umgebung des Punktes $\mathfrak{P}_\sigma$ verhält sie sich wie

$$t^{\alpha_\sigma}\mathfrak{P}(t),$$

wo t eine zu $\mathfrak{P}_\sigma$ gehörige Ortsuniformisierende, α_σ eine reelle oder komplexe Zahl, $\mathfrak{P}(t)$ eine reguläre Potenzreihe mit von Null verschiedenem konstantem Glied bedeutet. Überdies sei $\sum_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma =$ ganze Zahl**). 3. Ihre Zweige sind in der (nach Art des vorigen Paragraphen) zerschnittenen Fläche R'' eindeutig. 4. Längs der Schnitte v, a, b bestehen Relationen der Form (6.), wobei $V_\sigma = e^{-2\pi i \alpha_\sigma}$ wird und A_h, B_h reelle oder komplexe von Null verschiedene Zahlen sind.

Als Spezialfall subsumieren sich darunter die *unverzweigten multiplikativen* oder *Prymschen Funktionen****), wo keine Punkte P_σ vorhanden sind und f bereits in R' eindeutig ist.

Ich nenne eine multiplikative Funktion *primär*, wenn

$$(8.)\qquad \text{a)}\quad |A_h| = e^{2\pi \sum_{\sigma=1}^{s} a''_\sigma \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\sigma)}, \qquad \text{b)}\quad |B_h| = e^{-2\pi \sum_{\sigma=1}^{s} a''_\sigma \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\sigma)}$$

$$a_\sigma = a'_\sigma + i a''_\sigma \qquad h = 1, 2, \dots p.$$

ist, sonst *abgeleitet*. Eine reell verzweigte oder unverzweigte multiplikative Funktion ist also primär, wenn die absoluten Beträge ihrer Multiplikatoren V, A, B gleich 1 sind. Wie man leicht verifiziert, ist *das Produkt und der Quotient zweier primären Funktionen wieder primär*. Aus einer pri-

---

*) S. *A. Hurwitz*, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. 41, S. 403—442, bes. S. 431 ff.

**) Das ergibt sich als Folge der übrigen Bedingungen; s. ebenda.

***) S. Einleitung.

mären Funktion lassen sich durch Hinzufügung eines Faktors der Form (2.) unendlich viele abgeleitete Funktionen (mit derselben Verzweigungsart und denselben Nullstellen und Polen) herstellen. Umgekehrt gehört zu einer multiplikativen Funktion — wie aus Satz I folgt — stets eine und nur eine primäre Funktion mit derselben Verzweigungsart, denselben Nullstellen und Polen. Wir können uns daher im folgenden auf die Untersuchung von primären Funktionen beschränken.

Wir haben dann

Satz II: *Die Divisoren der Ordnung Null und die primären multiplikativen Funktionen entsprechen einander ein-eindeutig.*

Sei nämlich

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_u = \mathfrak{P}_1^{a_1} \dots \mathfrak{P}_s^{a_s} \cdot \mathfrak{P}_{s+1}^{a_{s+1}} \dots \mathfrak{P}_t^{a_t},$$

$$\sum_{\mu=1}^{s} \alpha''_\mu = 0, \qquad \sum_{\mu=1}^{t} \alpha'_\mu = g_v + g_u = 0$$

ein beliebiger Divisor der Ordnung Null, so entspricht $\mathfrak{P}$ in eindeutiger Weise nach (5.) eine primäre multiplikative Funktion*), insbesondere *einem algebraischen Divisor f eine algebraische Funktion f***). Zeigt nämlich f die Nullstellen und Pole der algebraischen Funktion F an, so ist $\frac{f}{F}$ eine überall reguläre, unverzweigte Funktion mit Multiplikatoren vom absoluten Betrag 1, also nach Satz I eine Konstante. Daraus folgt für einen algebraischen Divisor

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \mathfrak{P}_2^{a_2} \dots \mathfrak{P}_n^{a_n},$$

$$(9.) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu) = \text{ganze Zahl}, \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu) = \text{ganze Zahl}, \end{aligned} \qquad h = 1, 2, \dots p,$$

welche Relationen die eine Seite des *Abelschen Theorems* für die Integrale 1. Gattung darstellen. Es gilt aber auch umgekehrt: Jeder multiplikativen Funktion entspricht in eindeutiger Weise ein Divisor der Ordnung Null***). Daraus können wir in Verbindung mit Satz I schließen, daß jede solche Funktion von der Form (5.) ist.

---

*) Dieselbe enthält natürlich eine willkürliche multiplikative Konstante, welche in bekannter Weise (wie bei den algebraischen Funktionen) normiert werden kann.

**) Dadurch ist unsere Zuordnung vor jeder anderen ausgezeichnet.

***) S. *A. Hurwitz*, a. zuletzt a. O. S. 432.

§ 6. Der transzendente Gattungs- und Klassenbegriff.

Das System aller multiplikativen Funktionen, welche nur bei $\mathfrak{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \ldots s)$ verzweigt sind und an den Schnitten v_σ die Multiplikatoren V_σ besitzen, werde symbolisch mit

$$\begin{pmatrix} v_1 v_2 \ldots v_s \\ V_1 V_2 \ldots V_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\sigma \\ V_\sigma \end{pmatrix}$$

bezeichnet und eine *Gattung* genannt. Die unverzweigten Funktionen bilden für sich eine Gattung, welche wir kurz mit (1) bezeichnen. Es muß*)

$$V_1 V_2 \ldots V_s = 1$$

sein, woraus folgt, daß — von der Gattung (1) abgesehen — $s \geqq 2$ sein muß. Im übrigen sind die V_σ beliebige reelle oder komplexe Zahlen. Es gilt nun

Satz III: *Die Divisorengattungen der Ordnung Null und die Funktionsgattungen entsprechen einander ein-eindeutig.*

Zunächst ist klar: der Divisorenhauptgattung entspricht die Gattung der unverzweigten Funktionen und umgekehrt. Nun sei

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_u = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_s^{a_s} \cdot \mathfrak{P}_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots \mathfrak{P}_t^{a_t}$$

ein beliebiger verzweigter Divisor der Ordnung Null; nach (5.) entspricht ihm eine Funktion mit $V_\sigma = e^{-2\pi i a_\sigma}$. Ist $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'_v \cdot \mathfrak{P}'_u$ ein anderer Divisor derselben Gattung, also $\mathfrak{P}'_v = \mathfrak{P}_v$, so entspricht ihm eine Funktion mit denselben V_σ. Also einer Divisorengattung entspricht eine Funktionsgattung und überdies, wie leicht zu sehen, verschiedenen Divisorengattungen verschiedene Funktionsgattungen. Sei umgekehrt eine Gattung $\begin{pmatrix} v_\sigma \\ V_\sigma \end{pmatrix}$ $\sigma = 1, 2, \ldots s$ vorgelegt; dann gehört dazu eine Divisorengattung $(0), (\mathfrak{P}_v)$, wobei $\mathfrak{P}_v$ aus den Verzweigungspunkten $\mathfrak{P}_\sigma$ besteht, während die zugehörigen Exponenten α_σ gegeben sind durch

$$(11.) \qquad \alpha_\sigma = \alpha'_\sigma + i\alpha''_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \lg V_\sigma + k;$$

hierbei verstehen wir unter dem Logarithmus seinen Hauptwert, unter k eine ganze Zahl, welche so gewählt werde, daß

$$(11^a.) \qquad 0 \leqq \alpha'_\sigma < 1.$$

---

*) S. *A. Hurwitz*, a. zuletzt a. O. S. 432.

wird; α_σ'' ist ohnehin durch (11.) völlig bestimmt. Schließlich erkennt man leicht, daß zu verschiedenen Funktionsgattungen auch verschiedene Divisorengattungen gehören, womit unser Satz bewiesen ist.

Mit *Riemann* bezeichnen wir das System aller multiplikativen Funktionen, welche nur bei $\mathfrak{P}_\sigma (\sigma = 1, 2, \dots s)$ verzweigt sind und an den Schnitten v_σ, a_h, b_h die Multiplikatoren V_σ, A_h, B_h besitzen, mit

$$\begin{pmatrix} v_\sigma & a_h & b_h \\ V_\sigma & A_h & B_h \end{pmatrix}$$

und nennen es eine *Klasse* von Funktionen. Insbesondere heißt die Klasse *primär*, wenn die absoluten Beträge der A_h, B_h durch (8.) gegeben werden, wobei die α_σ'' durch die V_σ nach (11.) völlig bestimmt sind. Fehlen die $\mathfrak{P}_\sigma$, dann haben wir in

$$\begin{pmatrix} a_h & b_h \\ A_h & B_h \end{pmatrix} \qquad |A_h| = |B_h| = 1$$

eine primäre unverzweigte Klasse und insbesondere für $A_h = B_h = 1$ die Klasse der algebraischen Funktionen selbst. Es gilt nun

Satz IV: *Die Divisorenklassen der Ordnung Null und die primären Riemannschen Funktionsklassen entsprechen einander ein-eindeutig.*

Zunächst gilt das für die Divisorenhauptklasse E und die Klasse der algebraischen Funktionen; dann für die unverzweigten Divisoren und Funktionen, wie wir zuerst zeigen wollen. Sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiger unverzweigter Divisor, welchem nach (5.) eine Funktion f mit gewissen Multiplikatoren A_h, B_h (7.) entspricht. Ist $\mathfrak{P}'$ ein mit $\mathfrak{P}$ äquivalenter Divisor, f' die zugehörige Funktion, so besitzt diese dieselben Multiplikatoren, wie aus (9.) — angewendet auf den Divisor $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'}$ — folgt. Also einer Divisorenklasse entspricht eine Funktionsklasse und wieder verschiedenen Klassen $(\mathfrak{P})$ bzw. $(\tilde{\mathfrak{P}})$ auch verschiedene Funktionsklassen; denn die zu $\mathfrak{P}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{P}}$ gehörigen Funktionen f bzw. $\tilde{f}$ können nicht dieselben Multiplikatoren haben, weil sonst $\frac{f}{\tilde{f}}$ eine algebraische Funktion bzw. $\frac{\mathfrak{P}}{\tilde{\mathfrak{P}}}$ ein algebraischer Divisor sein müßte. Nehmen wir nun umgekehrt eine unverzweigte primäre Klasse $\begin{pmatrix} a_h & b_h \\ A_h & B_h \end{pmatrix}$ als gegeben an, wobei A_h, B_h beliebige von Null verschiedene Zahlen vom absoluten Betrag 1 sind, so gibt es dazugehörige

multiplikative Funktionen*) und damit Divisoren der Ordnung Null, und zwar gehören diese alle in dieselbe Klasse. Q. e. d.

Ganz analog zeigt man, daß auch zu einer verzweigten Divisorenklasse eine primäre verzweigte Funktionsklasse gehört, und zwar zu verschiedenen wieder verschiedene. Liegt dagegen umgekehrt eine primäre Klasse $\begin{pmatrix} v_\sigma & a_h & b_h \\ V_\sigma & A_h & B_h \end{pmatrix}$ vor, so ist dadurch (11., 11ª.) der Divisor $\mathfrak{P}_v$ völlig bestimmt, aus dem wir durch Hinzunahme eines beliebigen Hilfspunktes $\mathfrak{H}$ einen Divisor der *Ordnung Null* ableiten

$$\mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{H}^h, \qquad h = -\sum_{\sigma=1}^{s} \alpha_\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{s} \alpha'_\sigma .$$

Die zugehörige Funktion Φ wird gewisse Multiplikatoren**) A, B mit dem absoluten Betrag $|\mathsf{A}| = |A|$, $|\mathsf{B}| = |B|$ besitzen. Konstruieren wir schließlich eine unverzweigte Funktion f mit den Multiplikatoren $\frac{A}{\mathsf{A}}, \frac{B}{\mathsf{B}}$ vom absoluten Betrag 1, so ist $F = \Phi \cdot f$ eine primäre Funktion der gegebenen Klasse, welcher wir demnach den entsprechenden Divisor f bzw. die Klasse (f) zuweisen können. Jede andere der gegebenen Klasse angehörige Funktion liefert einen äquivalenten Divisor. Da schließlich zu verschiedenen Funktionsklassen auch verschiedene Divisorenklassen gehören, ist unser Satz völlig bewiesen.

§ 7. Das verallgemeinerte *Abel*sche Theorem.

Es handelt sich nun darum, ein transzendentes Kriterium anzugeben, wonach ein Divisor $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_u$ der Ordnung Null zu einer Funktionsgattung bzw. Klasse gehört.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{P}$ zur Gattung $\begin{pmatrix} v_\sigma \\ V_\sigma \end{pmatrix}$ $\sigma = 1, 2, \cdots s$ gehört, d. h. daß die ihm nach (5.) entsprechende Funktion ein Element dieser Gattung liefert, ist, daß $\mathfrak{P}_v$ die S. 172 angegebene Gestalt hat, insbesondere für die Gattung (1) $\mathfrak{P}_v = 1$ ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aber, daß $\mathfrak{P}$ zur

---

*) S. z. B. *H. Weyl*, a. a. O. S. 130 (Hilfssatz); „*Prym-Rost*“, I S. 182.

**) Der Einfachheit halber lassen wir den Index h weg.

primären Klasse $\begin{pmatrix} v_\sigma & a_h & b_h \\ V_\sigma & A_h & B_h \end{pmatrix}$ gehört, ist einmal, daß der verzweigte Bestandteil $\mathfrak{P}_v = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{P}_s^{a_s}$ die durch das obige Kriterium vollständig bestimmte Gestalt hat; zweitens, daß für den unverzweigten Teil $\mathfrak{P}_u = \mathfrak{P}_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots \mathfrak{P}_t^{a_t}$ folgende $2p$ Bedingungen für $h = 1, 2, \ldots p$ statthaben, welche das *verallgemeinerte Abelsche Theorem* bilden:

$$(12.)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ \sum_{\nu=s+1}^{t} \alpha_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu) = -\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu) - \frac{1}{2\pi i} \lg A_h + m_h, \\ &\text{b)}\ \sum_{\nu=s+1}^{t} \alpha_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu) = -\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu) + \frac{1}{2\pi i} \lg B_h + n_h. \end{aligned}$$

Hierbei ist unter den Logarithmen ihr Hauptwert zu verstehen, während m_h, n_h unbestimmte ganze Zahlen bedeuten. Setzt man

$$(13.)\qquad A_h = \varrho_h e^{2\pi i \varphi_h}, \qquad B_h = \tilde{\varrho}_h e^{2\pi i \psi_h},$$

so nehmen die Bedingungen (12.) unter Beachtung von (8.) folgende Gestalt an, da sich die imaginären Bestandteile wegheben:

$$(14.)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ \sum_{\nu=s+1}^{t} \alpha_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu) = -\sum_{\nu=1}^{s} \alpha'_\nu \Re W_{b_h}(\mathfrak{P}_\nu) - \varphi_h, \\ &\text{b)}\ \sum_{\nu=s+1}^{t} \alpha_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu) = -\sum_{\nu=1}^{s} \alpha'_\nu \Re W_{a_h}(\mathfrak{P}_\nu) + \psi_h. \end{aligned}$$

Rechts stehen lauter bekannte Größen; die Winkel φ_h, ψ_h sind bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt.

Die Bedingungen sind erstens notwendig; denn gehört die $\mathfrak{P}$ entsprechende Funktion der gegebenen Klasse an, dann sind sie erfüllt. Ist umgekehrt das letztere für einen Divisor $\mathfrak{P}$ der Fall, dann wird die zugehörige Funktion die richtige Verzweigungsart und die richtigen Multiplikatoren erhalten.

Für einen unverzweigten Divisor fallen die ersten Glieder auf der rechten Seite von (12.) und (13.) weg. Die Summen links beginnen von $\nu = 1$. Schließlich für einen algebraischen Divisor kommt in Formel (12.), wo nur die ganzen Zahlen rechts stehen bleiben, das gewöhnliche *Abel*sche Theorem für die Integrale 1. Gattung heraus.

§ 8. Gruppen von Funktionsklassen und ihre Charaktere.

Alles in § 3 über die Divisoren-Gattungen bzw. Klassen Gesagte läßt sich, sofern es sich um Divisoren der Ordnung Null handelt, vermöge der in § 6 gegebenen Zuordnung auf die (primären) Funktionsgattungen

bzw. Klassen übertragen. So entspricht der dortigen Komposition der Gattungen der Ordnung Null unmittelbar eine solche der Funktionengattungen; ebenso der Gruppe der Divisorenklassen nullter Ordnung die Gruppe der primären Funktionsklassen. Eine Untergruppe hiervon bilden die Klassen, welche nur an bestimmten Stellen $\mathfrak{P}_\sigma (\sigma = 1, 2, \dots s)$ verzweigt sind. Sind*)

$$\begin{pmatrix} v & a & b \\ V & A & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v & a & b \\ V' & A' & B' \end{pmatrix}$$

zwei derartige primäre Klassen, so ist ihr „Produkt" bzw. ihr „Quotient" die primäre Klasse

$$\begin{pmatrix} v & a & b \\ VV' & AA' & BB' \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} v & a & b \\ V/V' & A/A' & B/B' \end{pmatrix}.$$

Die Klassen, welche an den Stellen $\mathfrak{P}_\sigma$ *reell* verzweigt sind, bilden eine abermalige Untergruppe; die Größen V, A, B vom absoluten Betrag 1 sind ihre *Charaktere.* Letztgenannte Gruppe ist also isomorph mit der Gruppe, welche die $2p + s$ auf dem Einheitskreis unbeschränkt veränderlichen Größen V_σ, A_h, B_h bei der Multiplikation bilden. Von den reell verzweigten Klassen steigen wir über die Untergruppe der Klassen mit rationalen Verzweigungsexponenten und der n-seitigen Klassen**) schließlich hinab zur Gruppe der unverzweigten Klassen $\begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix}$, deren Charaktere A_h, B_h sind und die ich in einer früheren Arbeit bereits in Betracht gezogen habe***).

§ 9. Die verzweigten multiplikativen Differentiale.

Die Integrale der verzweigten multiplikativen Funktionen sind Funktionen, welche sich bei geschlossenen Umläufen auf R linear und ganz reproduzieren; d. h. sind y_1, y_2 zwei Zweige eines solchen, so ist

$$(15.) \qquad y_2 = \mu y_1 + \nu; \qquad \mu, \nu \text{ Konstanten.}$$

Jedes derartige Integral gibt zu einem Differential dy Veranlassung, welches 1. auf R'' eindeutig, analytisch und frei von wesentlichen Singularitäten ist; 2. sich in der Umgebung der Punkte $\mathfrak{P}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \dots s)$ verhält wie

*) Die Indizes lasse ich der Einfachheit halber weg.

**) S. *A. Hurwitz*, „Über algebraische Gebilde usw.", S. 43 f.

***) „A. Th.", S. 353 ff.; vergl. auch *H. Weyl*, a. a. O. S. 125 ff.

$$\frac{dy}{dt} = t^{a_\sigma}\mathfrak{P}(t);\quad \sum_{\sigma=1}^{s}\alpha_\sigma = \text{ganze Zahl};$$

3. bei Fortsetzung eines Zweiges über die Schnitte v, a, b die Multiplikatoren V, A, B (7.) erhält.

Jedes auf R erklärte Differential mit diesen Eigenschaften nennen wir ein *verzweigtes multiplikatives Differential;* die Unterscheidung von *primär* und abgeleitet ist genau dieselbe wie bei den Funktionen (§ 5). Es genügt auch hier, die primären Differentiale zu betrachten. Als Spezialfall sind darin die unverzweigten multiplikativen oder *Prymschen Differentiale* enthalten, welche wieder als Spezialfall die *Abelschen Differentiale* unter sich begreifen. Ist dy ein beliebiges primäres Differential mit den Multiplikatoren V, A, B, f eine Funktion der Klasse $\begin{pmatrix} v & a & b \\ V & A & B \end{pmatrix}$, so ist $\frac{dy}{f} = dw$ ein *Abel*sches Differential, also jedes dy von der Form

$$f dw = F dz, \tag{16.}$$

wo F eine primäre multiplikative Funktion, z eine unabhängige Körpervariable ist.

Daher entspricht — Satz II^a — jedem primären multiplikativen Differential dy in eindeutiger Weise ein Divisor $\mathfrak{Y}$ der Ordnung $2p-2$ und umgekehrt.

Denn sei, um das letztere zu beweisen, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_v \cdot \mathfrak{Y}_u$ ein solcher Divisor, $\mathfrak{W}$ ein einem *Abel*schen Differential dw entsprechender Divisor, dann wird

$$\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{W}} = f$$

ein Divisor der Ordnung Null, und wenn f die zugehörige primäre Funktion bezeichnet, entspricht $\mathfrak{Y} = f \cdot \mathfrak{W}$ das Differential $dy = f dw$. Diese Zuordnung ist aber unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{W}$. Denn erhalten wir unter Benutzung von $\mathfrak{W}_1$ analog $dy_1 = f_1 dw_1$, so wird $\frac{dy}{dy_1}$ eine primäre Funktion mit dem Divisor 1, also $dy = \text{const.}\, dy_1$.

Nunmehr überträgt sich die *Einteilung* der Divisoren der Ordnung $2p-2$ *in Gattungen und Klassen* von selbst auf die Differentiale und wir könnten Satz III und IV die entsprechenden Analoga als *Sätze III^a und IV^a* gegenüberstellen. Die Hauptgattung bilden die unverzweigten und darin wieder die Hauptklasse W die *Abel*schen Differentiale.

Was aber das *gegenseitige Verhalten* von Differential und Divisor anbelangt, bemerken wir noch folgendes. Verhält sich dy an einer Stelle $\mathfrak{A}$ wie

$$(17.) \qquad dy = t^{\alpha+n}\mathfrak{P}(t)\,dt \qquad \begin{matrix} 0 \leqq \Re\alpha < 1 \\ \mathfrak{P}(0) \neq 0 \end{matrix},$$

wobei die Exponenten α, n von der Wahl der Ortsuniformisierenden t unabhängig sind und $\mathfrak{P}(t)$ eine reguläre Potenzreihe ist, so enthält $\mathfrak{Y}_v$ bzw. $\mathfrak{Y}_u$ den Punkt $\mathfrak{A}$ mit dem Exponenten α bzw. n als Faktor; ist umgekehrt mit $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_v \cdot \mathfrak{Y}_u$ das letztere der Fall, dann wählen wir den Divisor $\mathfrak{W}$ aus der Klasse W so, daß er den Punkt $\mathfrak{A}$ gar nicht*), und daher $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{W}} = f$ denselben ebenfalls in der Potenz $\alpha + n$ enthält. $dy = f \cdot dw$ verhält sich daher an der Stelle $\mathfrak{A}$ wie $t^{\alpha+n}\mathfrak{P}(t)\,dt$, wobei $\mathfrak{P}(0) \neq 0$ und die Wahl von t für den Exponenten $\alpha + n$ gleichgültig ist, während $\mathfrak{P}(t)$ eine reguläre Potenzreihe bedeutet.

III. Kapitel. Arithmetische Untersuchung der Divisorenklassen.

§ 10. Problemstellung, Definitionen.

Die Untersuchung der multiplikativen Funktionen und deren Integrale (Differentiale) läuft nach dem vorhergehenden Kapitel auf die Untersuchung der Divisoren nullter und $(2p-2)$-ter Ordnung hinaus. Diese gliedert sich von selbst in die Betrachtung der Gattungen innerhalb der Ordnung 0 bzw. $2p-2$, der Klassen innerhalb einer Gattung und schließlich der Divisoren innerhalb einer Klasse selbst.

Die *Gattungen der Ordnung Null* werden durch P_v charakterisiert und lassen sich, je nachdem die Exponenten sämtlich Null ($P_v = 1$), reell, rein imaginär oder komplex sind, in unverzweigte, reelle, rein imaginäre oder komplexe Gattungen unterscheiden. Je nachdem ist in $\binom{v_\sigma}{V_\sigma}$ $V_\sigma = 1$, $|V_\sigma| = 1$, V_σ reell oder komplex.

Die Untersuchung der *Klassen in einer Gattung* (P_v) kommt auf die Betrachtung der *unverzweigten Divisorenklassen der Ordnung* $g_u = -g_v$ hinaus ($g_u = 0, -1, -2, \ldots$). In jeder Gattung gibt es eine „*einfachste*“

*) Nach „H.-L.“, S. 308 ist das immer möglich.

Klasse $\begin{pmatrix} v & a & b \\ V & A & B \end{pmatrix}$, welche dadurch charakterisiert ist, daß in ihr $\varphi_h = \psi_h = 0$ ist $(h = 1, 2, \dots p)$ nach (13.). Für die unverzweigte Gattung ist das die Klasse $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oder die Divisorenhauptklasse E. Gattungen, welche sich nur in den Imaginärteilen der Exponenten von $\mathfrak{P}_v$ unterscheiden, besitzen *dieselbe unverzweigte Klasse* $\times P_v$ als einfachste, wie aus (7.) hervorgeht. Insbesondere ist es für eine rein imaginäre Gattung (P_v) die Klasse $P_v \cdot E$.

Über die Divisoren der Ordnung $2p-2$ gelten die analogen Bemerkungen.

Was schließlich die *Divisoren innerhalb einer Klasse P* bzw. PW betrifft, so muß vor allem der Begriff des *Multiplums* von den unverzweigten auf die verzweigten Divisoren erweitert werden. Wir setzen zu dem Zweck

$$(18.) \qquad \mathfrak{P}_v = \mathfrak{P}_1^{a_1} \mathfrak{P}_2^{a_2} \dots \mathfrak{P}_s^{a_s} = \Pi \mathfrak{P}_{\mathrm{I}}^{a_{\mathrm{I}}} \dots \Pi \mathfrak{P}_{\mathrm{II}}^{a_{\mathrm{II}}} \dots,$$

wo das erste Produkt über alle die Punkte von $\mathfrak{P}_v$ zu erstrecken ist, für welche *der zugehörige Exponent einen von Null verschiedenen Realteil hat*, das zweite Produkt über die übrigen Punkte von $\mathfrak{P}_v$, und setzen kurz

$$(19.) \qquad \Pi \mathfrak{P}_{\mathrm{I}} \dots = \mathfrak{P}_{v\mathrm{I}}.$$

Ist jetzt $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mathrm{I}}^{x} \dots \mathfrak{P}_{\mathrm{II}}^{u} \dots \mathfrak{A}^{\alpha} \mathfrak{B}^{\beta} \dots$ ein beliebiger Divisor mit ganzzahligen Exponenten, so stelle ich folgende *Definitionen* auf:

Ein Divisor $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_v \cdot \mathfrak{P}_u$ *der Klasse P heißt ein Multiplum von* $\mathfrak{Q}$, *wenn* $\mathfrak{P}_u$ *ein Multiplum von* $\mathfrak{Q}$ *ist; ein Divisor* $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ *der Klasse* PW *heißt ein Multiplum von* $\mathfrak{Q}$, *wenn* $\mathfrak{P}_u \mathfrak{W}$ *ein Multiplum von* $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{P}_{v\mathrm{I}}^{-1}$ *ist.*

Diese Definition ist ausschließlich durch die *Klasse P* bzw. PW bestimmt. Für eine Funktion f der Klasse P bzw. ein Differential $dF = f dz$ der Klasse PW kommt sie darauf hinaus, daß — etwa für die Stelle $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$ mit der Ortsuniformisierenden t — die Entwicklung von $\frac{f}{t^{a_{\mathrm{I}}}}$ mit einer Potenz $\geqq z$ beginnt, bzw. die Entwicklung von $\frac{1}{t^{a_{\mathrm{I}}}} \frac{dF}{dt}$ mit einer Potenz $\geqq z-1$.

Speziell die Multipla von $\mathfrak{Q} = 1$ nennen wir „überall endlich", was mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch stimmt; die zugehörigen Funktionen bzw. Integrale verhalten sich in der Tat an allen Stellen endlich. Schließlich beachte man den für das Folgende wichtigen Umstand, daß für den zu $\mathfrak{P}$ reziproken Divisor $\mathfrak{P}^{-1} = \bar{\mathfrak{P}}_v \cdot \bar{\mathfrak{P}}_u$:

(20.) $$\breve{\mathfrak{P}}_v = \Pi \mathfrak{P}_{\mathrm{I}}^{\breve{a}_{\mathrm{I}}} \dots \Pi \mathfrak{P}_{\mathrm{II}}^{\breve{a}_{\mathrm{II}}} \dots$$

und wegen der Normierung in § 1

(21.) $$\breve{\alpha}_{\mathrm{I}} = -\alpha_{\mathrm{I}} + 1, \qquad \breve{\alpha}_{\mathrm{II}} = -\alpha_{\mathrm{II}}$$

wird.

§ 11. Der verallgemeinerte *Riemann-Roch*sche Satz und zwei Reziprozitätssätze.

Für die Klassen $P = P_v P_u$ und $P^{-1} = \breve{P}_v \cdot \breve{P}_u$ wird dem letzten Umstande zufolge

(22.) $$P_v \breve{P}_v = P_{v\mathrm{I}}, \qquad P_u \breve{P}_u P_{v\mathrm{I}} = E,$$

(23.) $$g_v + \breve{g}_v = \mathfrak{v} = \textit{Ordnung von } P_{v\mathrm{I}},$$

d. i. gleich der Anzahl der Punkte $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$.

Nun seien $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ zwei beliebige Divisoren (mit ganzen Exponenten), deren Produkt der Klasse E angehört,

(24.) $$\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}, \qquad E_1 E_2 = E, \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.$$

Die Anzahl der (komplex) linear unabhängigen Funktionen der Klasse P, welche Multipla von $\mathfrak{E}_1$ sind, heiße U, und es ist nach Definition

(24ª.) $$U = \left\{\frac{P_u}{E_1}\right\};$$

die Anzahl der (komplex) linear unabhängigen Differentiale der Klasse $P^{-1}W$, welche Multipla von $\mathfrak{E}_2$ sind, heiße V, was nach Definition gleich ist

(24ᵇ.) $$V = \left\{\frac{\breve{P}_u P_{v\mathrm{I}} W}{E_2}\right\}.$$

Nun stehen aber in der Klammer in (24ª.) und (24ᵇ.) unverzweigte Klassen mit dem Produkt W; also können wir auf sie den gewöhnlichen *Riemann-Roch*schen Satz*) anwenden, welcher ergibt

(25.) $$\boldsymbol{U - V = g_u + \varepsilon_2 - p + 1 = -g_v - \varepsilon_1 - p + 1}^{**}).$$

Bezeichnen wir die Differenz $V - U$ mit D, die analoge Differenz, wenn an Stelle von P speziell die Klasse E der algebraischen Funktionen tritt, mit D_{A}, so läßt sich das *verallgemeinerte Riemann-Rochsche Theorem* kurz so schreiben

---

*) S. *Hensel-Landsberg*, a. a. O. S. 304.

**) Wählt man speziell 1. $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E} = 1, 2$. $\mathfrak{E}_1$ gleich dem Reziproken eines *ganzen* Divisors der Ordnung ε $\left(\varepsilon = -\varepsilon_1,\ \mathfrak{E}_1 = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\dots}\right)$, so wird $U - V = \varepsilon + g_u - p + 1$, d. i. die Formel von *Ritter*, a. a. O. S. 314.

(25ª.) $$D = D_A + g_v$$

und liefert als *Korollar* für eine unverzweigte*) oder rein imaginäre Klasse

(26.) $$D = D_A .$$

g_v nenne ich die „*Gattungszahl*" der Klasse P. Aus dem Theorem, welches einen Zusammenhang zwischen den Funktionen und Differentialen zweier zueinander reziproker Klassen gibt, wollen wir jetzt zwei Reziprozitätssätze herleiten, welche sich jeweils nur auf die Funktionen, bzw. nur auf die Differentiale beziehen.

Wir verstehen unter U, V wieder die obigen Anzahlen und bezeichnen in analoger Weise die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen der Klasse P^{-1}, welche Multipla des Divisors $\mathfrak{E}_2' = \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{W}\mathfrak{P}_{vI}}$ von der Ordnung $\varepsilon_2' = \varepsilon_2 - (2p-2) - \mathfrak{v}$ sind, mit U^*; die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale der Klasse PW, welche Multipla des Divisors $\mathfrak{E}_1' = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{W} \mathfrak{P}_{vI}$ von der Ordnung $\varepsilon_1' = -\varepsilon_2'$ sind, mit V^*. Es ist dann

$$U^* = V, \qquad V^* = U$$

und man hat die beiden Gleichungen

(27.) $$U - V = -p + 1 - g_v - \varepsilon_1,$$

(28.) $$U^* - V^* = -p + 1 - \breve{g}_v + \varepsilon_1' = -p + 1 - \breve{g}_v - \varepsilon_2'.$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten und drückt dabei einmal die V durch die U, das andre Mal die U durch die V aus, so erhält man

(29.) $$2U + \varepsilon_1 + g_v = 2U^* + \varepsilon_2' + \breve{g}_v,$$

(30.) $$2V + \varepsilon_2 + \breve{g}_v = 2V^* + \varepsilon_1' + g_v .$$

Ändern wir, um zu einer mehr symmetrischen Form zu gelangen, nachträglich die Bezeichnungen, so können wir folgende Sätze aussprechen:

I. Reziprozitätstheorem:

$$2U + \delta + g_v = 2U^* + \delta^* + \breve{g}_v$$

i. W.: *Sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ zwei beliebige unverzweigte Divisoren, deren Produkt der Klasse $W^{-1} P_{vI}^{-1}$ angehört, so sind die doppelten Anzahlen $2U$ bzw. $2U^*$ der linear unabhängigen Funktionen der Klasse P bzw. P^{-1}, welche Multipla von $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}^*$ sind, vermehrt um die Ordnung δ von $\mathfrak{D}$ bzw. δ^* von $\mathfrak{D}^*$, und die Gattungszahl g_v von P bzw. $\breve{g}_v$ von P^{-1} einander gleich.*

II. Reziprozitätstheorem:

$$2V + \delta + g_v = 2^*V + {}^*\delta + g_v$$

*) Vom Verfasser aufgestellt in „A. Th." S. 356. Ein Spezialfall hiervon — wenn man die Voraussetzungen der letzten Anmerkung noch hinzunimmt — auch bei *A. Hurwitz*, Zur Theorie der *Abel*schen Funktionen, Gött. Nachr. 1892, S. 253.

i. W.: *Sind $\mathfrak{D}$ und $^*\mathfrak{D}$ zwei beliebige unverzweigte Divisoren, deren Produkt der Klasse WP_{v_I} angehört, so sind die doppelten Anzahlen $2V$ bzw. 2^*V der linear unabhängigen Differentiale der Klasse PW bzw. $P^{-1}W$, welche Multipla von $\mathfrak{D}$ bzw. $^*\mathfrak{D}$ sind, vermehrt um die Ordnung δ von $\mathfrak{D}$ bzw. $^*\delta$ von $^*\mathfrak{D}$, und die Gattungszahl g_v von P bzw. $\breve{g}_v$ von P^{-1} einander gleich.*

Ist für die zueinander reziproken Klassen P, P^{-1} $g_v = \breve{g}_v$ (wie z. B. für $g_v = 0$), so folgt als *Korollar:*

$$U + \frac{\delta}{2} = U^* + \frac{\delta^*}{2}$$

$$V + \frac{\delta}{2} = {}^*V + \frac{{}^*\delta}{2}\ ^*).$$

Das II. Reziprozitätstheorem kann als die Verallgemeinerung des *Brill-Noetherschen Reziprozitätssatzes* bei den algebraischen Funktionen (für $P = E$) angesehen werden. Wir erkennen schließlich, wie alle 3 Sätze dieses Paragraphen für alle Klassen einer Gattung *gleich* lauten.

§ 12. Folgerungen; Elementardifferentiale.

Von den zahlreichen Folgerungen, die sich aus den allgemeinen Sätzen des vorigen Paragraphen ergeben, beschränken wir uns, einige wenige auf die Existenz und Anzahl der Elementardifferentiale bezügliche abzuleiten, wobei wir $p > 1$ voraussetzen wollen.

Nimmt man speziell $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, so wird nach (25.)

$$\text{falls } g_v > 0, \quad V = p - 1 + g_v;$$

$$,, \quad g_v = 0, \begin{cases} P_u = E_1, & V = p; \\ \neq & = p - 1. \end{cases}$$

Wählen wir noch spezieller $\mathfrak{E}_2 = 1$ ($E_2 = E_1 = E$) und bedenken, daß mit $g_v = 0$ zugleich $\breve{g}_v = 0$ ist und umgekehrt, so bekommen wir den *Satz* V: *Die Anzahl der linear unabhängigen, überall endlichen Differentiale einer Klasse $P^{-1}W$ ist gleich $p - 1 + g_v$, wenn $g_v > 0$; gleich $p - 1$, wenn $g_v = 0$ — ausgenommen die Klassen von der Form W und $P_v W$ (mit $g_v = 0$).* Letztere wollen wir daher *Ausnahmeklassen* nennen**).

---

*) Für die Klasse E und das 2. Korollar s. *Hensel-Landsberg*, a. a. O. S. 304 (Satz I) oder *H. Weyl*, a. a. O. S. 125. Das I. Reziprozitätstheorem ist anscheinend für die Klasse E niemals formuliert.

**) Diese spezielle Folgerung auch bei *A. Hurwitz*, a. zuletzt a. O. S. 251.

Die so gefundenen „Elementardifferentiale 1. Gattung" können algebraisch normiert werden wie im Fall $P = E$*).

Wählen wir jetzt $\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{\mathfrak{S}}, \frac{1}{\mathfrak{S}^2}, \ldots \frac{1}{\mathfrak{S}^n}, \ldots$, so erhalten wir der Reihe nach für eine von einer Ausnahmeklasse verschiedene Klasse die „Elementardifferentiale 2. Gattung" mit einem einfachen, zweifachen usw. Pol an der willkürlichen Stelle $\mathfrak{S}$: $d\omega_{\mathfrak{S}}, d\omega_{\mathfrak{S}^2}, \ldots d\omega_{\mathfrak{S}^n}, \ldots$. Es folgt**) dann die *Partialbruchzerlegung* eines beliebigen Differentials der Klasse vermittelst der (geeignet normierten) $d\omega_{\mathfrak{S}^n}$ sowie *die Umkehrung:*

Schreibt man an einer endlichen Anzahl von Stellen die „Hauptteile" beliebig vor, so gibt es stets ein Differential der Klasse, welches die gegebenen Hauptteile besitzt.

Für eine Ausnahmeklasse hingegen tritt an Stelle des fehlenden $d\omega_{\mathfrak{S}}$ ein „*Elementardifferential* 3. *Gattung*" $d\Omega_{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}}$ mit einer beliebig, aber fest gewählten Unendlichkeitsstelle $\mathfrak{S}_0$ und einer variabeln $\mathfrak{S}$, dessen Existenz man erkennt, wenn wir $\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}}$ wählen. Für $\mathfrak{E}_2 = \frac{1}{\mathfrak{S}^2}, \frac{1}{\mathfrak{S}^3} \ldots$ bekommt man dann der Reihe nach wieder Elementardifferentiale $d\Omega_{\mathfrak{S}^2}$, $d\Omega_{\mathfrak{S}^3}, \ldots$. Es folgt dann analog die *Partialbruchzerlegung*; aber in der *Umkehrung* dürfen die Hauptteile nicht wie oben willkürlich gewählt werden, sondern die Koeffizienten der (-1)-ten Potenzen müssen einer leicht angebbaren linearen Relation genügen. Speziell für die Klasse W ist das die Bedingung, daß die Summe der Residuen gleich Null ist.

Ähnliche Folgerungen wie für die Differentiale können auch für die Funktionen aus dem verallgemeinerten *Riemann-Roch*schen Satz gezogen werden. Der Kürze halber kann indes darauf nicht mehr eingegangen werden***). Wir bemerken nur noch zum Schluß, daß wir nicht nur in der Lage sind, wie oben die Anzahl der Differentiale, z. B. der überall endlichen, anzugeben, sondern auch — analog wie im Fall $P = E$†) — *eine Basis für dieselben wirklich herzustellen.*

---

*) Vergl. etwa *H. Weyl*, a. a. O. S. 123. Für die unverzweigten Klassen habe ich eine andere, tiefergehende Normierung früher aufgestellt, s. „A. Th." S. 366.

**) Der kundige Leser wird sich hierbei vieles ergänzen müssen. Vergl. auch „A. Th." S. 357.

***) Vergl. *Ritter*, a. a. O. § 13.

†) S. *Hensel-Landsberg*, a. a. O. 19. Vorlesung.

Note on rational functions of several complex variables.

By Mr. *Dunham Jackson* at Cambridge, Massachusetts.

*Weierstraß**) stated the theorem that a single-valued function of several complex variables which has the character of a rational function in the neighborhood of every point must actually be a rational function, and a proof was subsequently published by *Hurwitz***). Of course it is necessary for the truth of the theorem that the domain of the independent variables be understood to include not only all finite points, but also points at infinity. A manner of adjoining points at infinity is indicated by the words of *Weierstraß****):

„Ferner soll, wenn $(a_1, \dots a_r)$ eine bestimmte Stelle des Gebietes ist, die Gesamtheit der Stellen $(u_1, \dots u_r)$, für die jede der Differenzen $(u_1 - a_1), \dots (u_r - a_r)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine gegebene Größe δ ist, die „Umgebung (δ) der Stelle $(a_1, \dots a_r)$" heißen. (Dabei setze ich fest, daß der Formel $u - a$ in dem Falle, wo $a = \infty$ ist, die Bedeutung $\frac{1}{u}$ gegeben werde.)"

That is, the domain of each variable separately is completed by the adjunction of a single point ∞. A point at infinity in the space of n complex variables is a point at least one coordinate of which is infinite. Such a point is brought into the finite domain by a linear transformation in which each variable is transformed independently of all the others.

*) *Weierstraß*, Untersuchungen über die $2r$-fach periodischen Funktionen von r Veränderlichen. This Journal, vol. 89 (1880), pp. 1—8; p. 5.

**) *Hurwitz*, Beweis des Satzes, daß eine einwertige Funktion beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. This Journal, vol. 95 (1883), pp. 201—206.

***) *Weierstraß*, loc. cit., p. 3.

It is on the basis of this interpretation that *Hurwitz*'s proof is applicable, though *Hurwitz* himself does not mention the point explicitly.

The above convention as to the infinite region is not, however, the only practicable one. *Osgood**) has proved recently that the theorem is true also for a „projective" space**), that is, one in which the neighborhood of a point at infinity is carried over into the neighborhood of a finite point by a linear transformation involving all the variables together. It is the purpose of this note to give a demonstration for the intermediate case in which the variables are divided into a number of sets in any way, and the variables of any one set are transformed projectively among themselves, but independently of the variables of the other sets. It will be convenient, however, after some further preliminary remarks regarding *Hurwitz*'s proof, to adopt a formulation in which the use of the word „infinity" is avoided.

An examination of *Hurwitz*'s reasoning shows that it is by no means necessary to include in the hypothesis an assumption that the given function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ can be expressed as the quotient of two power series in the neighborhood of *every* point at infinity***). It is sufficient, as far as the infinite region is concerned, that this condition be satisfied for n points suitably situated, namely, for the points $(\infty, a_2, \ldots a_n)$, $(a_1, \infty, \ldots a_n), \ldots (a_1, a_2, \ldots \infty)$, obtained by replacing the coordinates of a single finite point $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ by ∞, one at a time. More particularly still, it is sufficient that f be expressible as the quotient of two power series in the neighborhood of the single point at infinity $(\infty, \infty, \ldots \infty)$; for then the requirement just stated will be fulfilled if $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ itself is chosen in the neighborhood of this point.

The theorem to be proved in this paper may be stated as follows:

Theorem. Let the n arguments of the single-valued function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *be divided into k sets* $x_1, \ldots x_{r_1}$; $x_{r_1+1}, \ldots x_{r_2}$; $\ldots$; $x_{r_{k-1}+1}, \ldots x_n$.

---

*) *Osgood*, A condition that a function in a projective space be rational. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 13 (1912), pp. 159—163.

**) cf. also *Bôcher*, The infinite regions of various geometries. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 20 (1914), pp. 185—200.

***) cf. *Osgood*, Topics in the theory of functions of several complex variables, Madison Colloquium, New York, 1914, pp. 143—144.

Let f be expressible in the neighborhood of every finite point of the space of the n variables as the quotient of two functions each of which is analytic at the point; and let f be expressible as the quotient of two power series in

$$\frac{x_1}{x_{r_1}}, \frac{x_2}{x_{r_1}}, \cdots \frac{x_{r_1-1}}{x_{r_1}}, \frac{1}{x_{r_1}}; \frac{x_{r_1+1}}{x_{r_2}}, \cdots \frac{x_{r_2-1}}{x_{r_2}}, \frac{1}{x_{r_2}}; \cdots; \frac{x_{r_{k-1}+1}}{x_n}, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{1}{x_n},$$

for all sufficiently small values of these ratios. Then f is a rational function of $x_1, x_2, \ldots x_n$.

This theorem reduces when $k=n$ to that of *Weierstraß* and *Hurwitz*, interpreted in the light of the remark made just above. For $k=1$ it is *Osgood*'s theorem. We shall assume the former result as known, and show that *Osgood*'s method of passing from that to his theorem gives also the present generalization.

Corresponding to the k sets of variables x let k sets of variables z be introduced by relations of which the following are typical:

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_{r_1}, \\
x_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{r_1-1} z_{r_1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{r_1-1} &= z_2 z_3 \cdots z_{r_1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_{r_1-1}, \\
x_{r_1} &= z_1 z_2 \cdots z_{r_1}.
\end{aligned}$$

The variables x of each set are placed equal respectively to the elementary symmetric functions of the corresponding set of variables z. To every finite point $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ of the z-space corresponds one finite point $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ of the x-space. The function $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(z_1, z_2, \ldots z_n)$ is a single-valued function of the variables z. In the neighborhood of every finite point of the z-space it can be expressed as the quotient of two functions of the variables z which are analytic there, since an analytic function of $x_1, \ldots x_n$ is an analytic function of $z_1, \ldots z_n$. Furthermore, since

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_{r_1}} &= \frac{1}{z_2 z_3 \cdots z_{r_1}} + \cdots + \frac{1}{z_1 z_2 \cdots z_{r_1-1}}, \\
\frac{x_2}{x_{r_1}} &= \frac{1}{z_3 \cdots z_{r_1}} + \cdots + \frac{1}{z_1 \cdots z_{r_1-2}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{x_{r_1-1}}{x_{r_1}} &= \frac{1}{z_1} + \cdots + \frac{1}{z_{r_1}}, \\
\frac{1}{x_{r_1}} &= \frac{1}{z_1 z_2 \cdots z_{r_1}},
\end{aligned}$$

and similar relations hold for the variables of the other sets, the ratios

$$\frac{x_1}{x_{r_1}}, \dots \frac{1}{x_n},$$

which appear in the statement of the theorem, will be very small if the reciprocals

$$\frac{1}{z_1}, \dots \frac{1}{z_n}$$

are very small, and the representation of $f(x_1, \dots x_n) = \varphi(z_1, \dots z_n)$ as the quotient of two power series in

$$\frac{x_1}{x_{r_1}}, \dots \frac{1}{x_n}$$

leads to a representation as the quotient of two power series in

$$\frac{1}{z_1}, \dots \frac{1}{z_n},$$

which converge for sufficiently small values of the last-named arguments. Thus the conditions are fulfilled for the application of the theorem which forms our starting-point; $\varphi(z_1, \dots z_n)$ is a rational function of $z_1, \dots z_n$.

It is clear that φ is symmetric in the variables z belonging to any one of the k sets. If φ is expressed as the quotient of two polynomials in $z_1, \dots z_n$ which are relatively prime, these polynomials separately must be symmetric in the variables of each set. Either is a symmetric polynomial in $z_1, \dots z_{r_1}$, for example, with coefficients which are polynomials in $z_{r_1+1}, \dots z_n$. Hence it is a polynomial in $x_1, \dots x_{r_1}$, with coefficients which are still symmetric polynomials in each of the remaining sets of variables z. It can now be regarded as a symmetric polynomial in $z_{r_1+1}, \dots z_{r_2}$, with coefficients which are polynomials in $x_1, \dots x_{r_1}$ and $z_{r_2+1}, \dots z_n$. As such, it can be expressed as a polynomial in $x_{r_1+1}, \dots x_{r_2}$, with coefficients which are polynomials in $x_1, \dots x_{r_1}$ and $z_{r_2+1}, \dots z_n$, symmetric in each of the $k-2$ sets of the latter variables. By continuing this reasoning, it is seen that each polynomial in $z_1, \dots z_n$ can be expressed as a polynomial in $x_1, \dots x_n$. Hence $f(x_1, \dots x_n)$ is a rational function of its arguments.

Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers.

Von Herrn *K. Hensel* in Marburg a. d. L.

Die Exponentialdarstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers habe ich in zwei kürzlich veröffentlichten Arbeiten*) in ihren Elementen unter Benutzung der arithmetischen Definition der Exponentialfunktion und des Logarithmus dargestellt, welche ich in meiner im Jahre 1913 veröffentlichten Zahlentheorie eingeführt hatte.

Weitere Untersuchungen haben mir nun gezeigt, daß man von diesen analytisch-arithmetischen Hilfsmitteln absehen und die ganze Untersuchung auf rein arithmetischer Grundlage durchführen kann. Dies soll in dieser Abhandlung geschehen und zugleich sollen die in ihr gefundenen Resultate in einer zweiten sich unmittelbar anschließenden Arbeit zur Begründung einer vollständigen Theorie der Potenzreste für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul benutzt werden, eine Aufgabe, deren Lösung bisher noch nicht gefunden war.

Ich will zuerst den einfachsten Fall der Exponentialdarstellung aller rationalen Zahlen für den Bereich einer beliebigen reellen Primzahl p und die Theorie der Potenzreste modulo p^m durchführen. Einmal besitzen näm-

*) *K. Hensel*, Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für den Bereich eines beliebigen Primteilers. Dieses Journal Bd. 145, S. 92—113.

K. Hensel, die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors, Festschrift für *H. A. Schwarz* (Berlin 1914) S. 61—75.

lich die hier besonders einfachen Resultate auch an sich ein Interesse, dann aber kann ein großer Teil der im allgemeinen Falle aufzustellenden Definitionen und durchzuführenden Untersuchungen bereits hier vollständig auseinandergesetzt werden.

§ 1.

Die Exponentialdarstellung der rationalen Zahlen für den Bereich einer reellen Primzahl p und die Theorie der Potenzreste modulo p^m.

Jede rationale Zahl A kann für den Bereich einer beliebigen reellen Primzahl p eindeutig in der folgenden Form

$$A = p^a \eta \qquad (p) \tag{1.}$$

dargestellt werden, wo

$$\eta = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots \qquad c_0 \not\equiv 0 \pmod{p} \tag{1a.}$$

eine beliebige p-adische Einheit bedeutet, welche wir als reduziert voraussetzen können, so daß alle Koeffizienten c_i Zahlen der Reihe $(0, 1, \ldots p-1)$ sind. Ist $c_0 = 1$, so heiße η eine *Einseinheit*.

Die Exponentialdarstellung aller rationalen Zahlen A ergibt sich nun aus der Gleichung (1.), wenn es gelingt, alle Einheiten η als Potenzen von einer oder mehreren unter ihnen eindeutig darzustellen. Hierzu führen die folgenden Betrachtungen und Definitionen:

Eine Einheit η ist *vom nullten Grade*, wenn $c_0 \not\equiv 1$ ist; sie ist allgemein *vom k-ten Grade*, wenn $c_0 = 1$ und in ihrer Entwickelung

$$\eta = 1 + c_k p^k + \cdots$$

c_k der erste von Null verschiedene Koeffizient ist. Das Glied c_0 bzw. $c_k p^k$ soll *das Hauptglied* der Einheit nullten bzw. k-ten Grades genannt werden. Zwei Einheiten k-ten Grades heißen *äquivalent*, wenn sie dasselbe Hauptglied c_0 bzw. $c_k p^k$ haben. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn sie sich um eine Einheit von höherem als dem k-ten Grade multiplikativ unterscheiden; denn aus der Äquivalenz der beiden Einheiten k-ten Grades η und η' folgen ja die Kongruenzen:

$$\eta' \equiv \eta \pmod{p^{k+1}}, \qquad \frac{\eta'}{\eta} \equiv 1 \pmod{p^{k+1}}, \tag{2.}$$

es besteht also eine Gleichung $\eta' = \eta \eta_{k+1}$, wo η_{k+1} mindestens vom $(k+1)$-ten Grade ist.

Ich betrachte nun für $k = 1, 2, \ldots$ irgend ein System $(\overset{(k)}{\eta})$ von p Einheiten $1 + c_k p^k + \cdots$, in denen c_k irgend ein vollständiges Restsystem modulo p durchläuft. Ist dagegen $k = 0$, so verstehe ich unter einem System $(\overset{(0)}{\eta})$ irgend eine Reihe von $p-1$ Einheiten $c_0 + \cdots$, wo c_0 ein System von $p-1$ modulo p inkongruenten *Einheiten*, also etwa die Zahlenreihe $1, 2, \ldots p-1$ durchläuft. Dann ist jede Einheit η vom k-ten oder höheren Grade gleich einer einzigen unter diesen p bzw. $p-1$ Einheiten, multipliziert mit einer Einheit von mindestens $(k+1)$-tem Grade. Ist also $(\overset{(0)}{\eta}), (\overset{(1)}{\eta}), \ldots$ je ein solches System von $p-1$ bzw. p Einheiten für die Grade $0, 1, 2, 3, \ldots$, so ist jede Einheit η für den Bereich von p eindeutig in der Form

$$\eta = \eta_0\, \eta_1\, \eta_2\, \eta_3 \cdots \qquad (p) \tag{3.}$$

darstellbar, wo allgemein η_i eine bestimmte unter den $p-1$ bzw. p Einheiten des Systems $(\overset{(i)}{\eta})$ ist. Einmal nämlich kann man sukzessive die Einheiten $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ beliebig weit bestimmen, denen $\eta, \frac{\eta}{\eta_0}, \frac{\eta}{\eta_0 \eta_1}, \ldots$ in den Systemen $(\overset{(0)}{\eta}), (\overset{(1)}{\eta}), (\overset{(2)}{\eta}), \ldots$ äquivalent sind. Andererseits ist diese Darstellung auch eindeutig; denn wären:

$$\eta = \eta_0 \cdots \eta_k \eta_{k+1} \cdots = \eta_0 \cdots \eta_k \eta'_{k+1} \cdots \qquad (p)$$

zwei verschiedene Darstellungen derselben Einheit η, und η_{k+1} und η'_{k+1} die beiden ersten verschiedenen Elemente derselben, so ergäbe sich durch Division derselben eine Kongruenz modulo p^{k+2}

$$\frac{\eta'_{k+1}}{\eta_{k+1}} \equiv 1 \pmod{p^{k+2}},$$

welche nur bestehen kann, wenn $\eta_{k+1} = \eta'_{k+1}$ ist. Umgekehrt stellt auch jedes beliebige Produkt $\eta_0\, \eta_1\, \eta_2 \cdots$ eine Einheit η dar.

Hiernach handelt es sich allein darum, ein vollständiges System $(\overset{(0)}{\eta}), (\overset{(1)}{\eta}), \ldots$ nicht äquivalenter Einheiten für die Grade $0, 1, 2, \ldots$ möglichst einfach multiplikativ darzustellen. Als Elemente von $(\overset{(0)}{\eta})$ können vorläufig die $p-1$ Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ selbst gewählt werden. Ist nun p zunächst eine beliebige *ungerade* Primzahl, so folgt durch induktiven Schluß leicht, daß für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Potenzen:

$$(1+p)^{cp^{k-1}} = 1 + cp^k + \cdots \tag{4.}$$

für $c = 0, 1, \ldots p-1$ je ein vollständiges System $(\overset{(k)}{\eta})$ von nicht äquivalenten Einseinheiten für den Grad k bilden; und damit ist bewiesen, daß jede *Eins-*

einheit η, d. h. jede Einheit, deren Entwickelung mit 1 beginnt, eindeutig in der Form

$$(5.) \qquad \eta = (1+p)^{c_0+c_1p+c_2p^2+\cdots} = (1+p)^c \qquad (p)$$

darstellbar ist, wo $c = c_0 + c_1 p + \cdots$ eine eindeutig bestimmte reduzierte ganze p-adische Zahl bedeutet, und daß umgekehrt jede solche Potenz $(1+p)^c$ eine eindeutig bestimmte Einseinheit darstellt.

Ein sachlich geringer, aber prinzipiell sehr wesentlicher Unterschied ergibt sich für die kleinste Primzahl $p = 2$, weil auf sie, eben wegen ihrer Kleinheit, die vorige Untersuchung nicht vollständig anwendbar ist. Hier liefert nämlich der bei (4.) angewendete Induktionsschluß für die Basis $1 + 2 = 3$ die Gleichungen:

$$(6.) \quad (1+2)^1 = 1+2,\ (1+2)^2 = 1+2^3, \ldots (1+2)^{2^{k-2}} = 1+2^k+\cdots,$$

d. h. die Potenzen $(1+2)^{c2^l}$ liefern für $c = 0, 1$ und für $l = 0, 1, 2, \ldots$ Basissysteme für die Grade $1, 3, 4, \ldots$. Will man also auch hier für alle Grade je ein System nicht-äquivalenter Einheiten haben, so muß man noch ein solches für den zweiten Grad, also etwa $(1+2^2)^b = 5^b$ für $b = 0, 1$ hinzunehmen, wodurch sich die eindeutige Darstellung

$$\eta = 5^b\, 3^c \qquad \left(\begin{smallmatrix} b=0,1 \\ c=c_0+2c_1+\cdots \end{smallmatrix}\right)$$

aller dyadischen Einheiten ergibt, wenn c eine beliebige ganze dyadische Zahl bedeutet. Eine noch einfachere Darstellung erhält man, wenn man als Basis nicht eine Einheit ersten, sondern eine solche zweiten Grades, etwa $1 + 2^2 = 5$, zugrunde legt und beachtet, daß hier allgemein:

$$(6^a.) \qquad (1+2^2)^{2^{k-2}} = 1+2^k+\cdots \qquad (k=2,3,\ldots)$$

ist. Hier hat man noch eine Basis für die Einheiten ersten Grades, also etwa $(1+2)^b$ für $b = 0, 1$ hinzuzunehmen, wodurch man die eindeutige Darstellung:

$$(7.) \qquad \eta = 3^b\, 5^c \qquad \left(\begin{smallmatrix} b=0,1 \\ c=c_0+2c_1+\cdots \end{smallmatrix}\right)$$

aller dyadischen Einheiten erhält.

Eine andere sehr bemerkenswerte Darstellung ergibt sich endlich aus der Tatsache, daß allein in diesem Ausnahmefalle $p = 2$ im Körper der p-adischen Zahlen auch die p-ten Einheitswurzeln vorkommen. Im folgenden wird allgemein bewiesen, daß das Entsprechende für alle algebraischen Körper gilt. Hier enthält offenbar der Körper der dyadischen Zahlen wirklich die zweite Einheitswurzel $-1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots$, und

auch sie ist eine Einseinheit ersten Grades. Benutzt man sie an Stelle von 3, so erhält man statt der vorigen die einfachere Darstellung:

$$(7^{a}.) \qquad \eta = (-1)^b 5^c \qquad \binom{b=0,1}{c=c_0+2c_1+\cdots}$$

aller Einheiten.

Die bis jetzt gefundenen Resultate ergeben nun einen einfachen Beweis der Tatsache, daß in jedem Körper $K(p)$ die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln enthalten sind, daß also in ihm die Gleichung

$$(8.) \qquad x^{p-1} - 1 = 0 \qquad (p)$$

so viele verschiedene Wurzeln besitzt, als ihr Grad angibt. Ist nämlich i eine der $p-1$ Einheiten $1, 2, \ldots p-1$, so ist nach dem kleinen *Fermat*schen Satze $i^{p-1} = 1 + \cdots$ eine Einseinheit; es ist also nach dem soeben bewiesenen Satze:

$$(9.) \qquad i^{p-1} = (1+p)^{c_i} = \left((1+p)^{\bar{c}_i}\right)^{p-1} \qquad (p),$$

wo c_i eine bestimmte ganze p-adische Zahl ist, welche ja auch in der Form $\bar{c}_i(p-1)$ geschrieben werden kann, in der auch $\bar{c}_i$ ganz ist. Setzt man also

$$(9^{a}.) \qquad i(1+p)^{-\bar{c}_i} = w_i,$$

so ist auch $w_i = i + \cdots$ eine p-adische Einheit, und für sie geht die obige Gleichung (9.) über in $w_i^{p-1} = 1$; die Gleichung (8.) besitzt also für $i = 1, 2, \ldots p-1$ die $(p-1)$ modulo p inkongruenten, also sicher von einander verschiedenen Wurzeln $w_1, w_2, \ldots w_{p-1}$, d. h. in $K(p)$ existieren genau $p-1$ $(p-1)$-te Einheitswurzeln.

Unter ihnen gibt es bekanntlich stets $\varphi(p-1)$ primitive Einheitswurzeln; ist also w eine von diesen, so sind alle übrigen in der Reihe w^b enthalten, wo $b = 0, 1, 2, \ldots p-2$ ist. Wählt man speziell diese $p-1$ modulo p inkongruenten Einheitswurzeln w^b als Fundamentalsystem $\binom{(0)}{\eta}$, so erhält man für alle ungeraden Primzahlen p die folgende Darstellung:

$$(10.) \qquad \eta = w^b (1+p)^c, \qquad \binom{b=0,1,\ldots p-2}{c=c_0+c_1 p+\cdots}$$

während für die Primzahl $p = 2$ nach der vorher durchgeführten Betrachtung

$$(10^{a}.) \qquad \eta = (-1)^b 5^c \qquad \binom{b=0,1}{c=c_0+c_1 2+\cdots}$$

ist.

Die unendlich vielen Einheiten η bilden in ihrer Gesamtheit eine *Abel*sche Gruppe G, da das Produkt von zwei Einheiten wieder eine solche ist. Nennt man auch hier die positive Zahl m den *Exponenten* einer Einheit η,

wenn η^m die kleinste Potenz von η ist, welche gleich 1 wird, so gehören z. B. w und -1 zu den endlichen Exponenten $p-1$ und 2, aber $(1+p)$ und 5 zu den unendlich großen Exponenten p^∞ bzw. 2^∞. Ferner lehrt die soeben durchgeführte Untersuchung, daß die Einheiten $(w, (1+p))$ bzw. $(-1, 5)$ je eine Basis der Gruppe G für ein ungerades p bzw. für die Primzahl 2 bilden, da jede Einheit η eindeutig in der Form

$$\eta = w^b (1+p)^c \quad (p) \qquad \text{bzw.} \qquad \eta = (-1)^b 5^c \quad (2)$$

darstellbar ist, wenn b ein vollständiges Restsystem modulo $p-1$, bzw. 2, c dagegen ein solches modulo p^∞ bzw. 2^∞ durchläuft. Da im ersten Falle $p-1$ und p also auch $p-1$ und p^∞ teilerfremd sind, so könnte direkt ohne Schwierigkeit bewiesen werden, daß die zweigliedrige Basis $(w, 1+p)$ auch durch eine eingliedrige (η) z. B. durch $\eta = w(1+p)$ ersetzt werden kann. An die Stelle von $w(1+p)$ kann hier auch die Einheit

$$\eta = w^b (1+p)^c$$

dann und nur dann als Basiselement treten, wenn b und c bzw. Einheiten modulo $p-1$ und modulo p sind, wenn also w^b eine *primitive* $(p-1)$-te Einheitswurzel und $(1+p)^c$ eine Einseinheit *ersten Grades* ist. Aus den somit für η bestehenden beiden Kongruenzen:

$$\eta \equiv w^b \pmod{p} \qquad \eta \equiv w^b (1+cp) \not\equiv w^b \pmod{p^2}$$

ergibt sich also der Satz:

> Die Einheit η ist dann und nur dann ein Basiselement für die Darstellung aller Einheiten für den Bereich von p, wenn sie modulo p, aber nicht modulo p^2, einer primitiven $(p-1)$-ten Einheitswurzel w^b kongruent ist.

Für $p=2$ dagegen ist es nicht möglich, die zweigliedrige Basis $(-1, 5)$ durch eine eingliedrige (η) zu ersetzen; denn wäre

$$-1 = \eta^c, \qquad 5 = \eta^d \quad (2),$$

so würde sich $(-1)^d 5^{-c} = 1 \ (2)$ ergeben, was nur möglich ist, wenn $c=0$, $d=0$ wäre.

Endlich erkennt man leicht, daß für den Bereich von 2 zwei Einseinheiten,

$$\eta_0 = (-1)^{b_0} 5^{c_0}, \qquad \eta_1 = (-1)^{b_1} 5^{c_1},$$

stets und nur dann eine Basis bilden, wenn die aus den Exponenten gebildete Determinante $(b_0 c_1 - b_1 c_0) \equiv 1 \pmod{2}$ ist.

Aus diesen Ergebnissen folgen nun sofort die Grundlagen für die Untersuchung der rationalen Zahlen oder, was offenbar auf dasselbe herauskommt, die Begründung für die Untersuchung der rationalen Einheiten η für eine beliebige Potenz p^{s+1} von p als Modul. Man erkennt nämlich genau wie vorher, daß für jede Einheit modulo p^{s+1} eine eindeutig bestimmte Kongruenz besteht,

$$\eta \equiv \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_s \pmod{p^{s+1}},$$

wo wieder allgemein η_i ein eindeutig bestimmtes Element aus dem Basissysteme $(\overset{(i)}{\eta})$ für den i-ten Grad bedeutet. Hieraus folgt also für jedes η die für eine beliebige Primzahlpotenz p^{s+1} bzw. 2^{s+1} gültige Kongruenz:

$$\eta \equiv w^b (1+p)^c \pmod{p^{s+1}} \quad \text{bzw.} \quad \eta \equiv (-1)^b 5^c \pmod{2^{s+1}},$$

wo die Exponenten c ein vollständiges Restsystem modulo p^s bzw. modulo 2^{s-1} durchlaufen.

Die Einheiten modulo p^{s+1} bilden eine endliche Gruppe G_{s+1} vom Grade $\varphi(p^{s+1}) = (p-1)p^s$.

Für eine ungerade Primzahlpotenz p^{s+1} bildet jede Zahl $\eta_0 = w^{b_0}(1+p)^{c_0}$ eine Basis dieser Gruppe, für welche b_0 bzw. c_0 Einheiten modulo $p-1$ bzw. modulo p sind. Dagegen besitzt die Gruppe aller Einheiten modulo 2^{s+1} für $s+1 \geq 3$ stets eine zweigliedrige Basis z. B. $(-1, 5)$, und ihre Invarianten sind 2 und 2^{s-1}.

§ 2.

Die Exponentialdarstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers $\mathfrak{p}$. Die Einheiten k-ten Grades und ihre Darstellung durch eine Basis.

Jede algebraische Zahl A kann für den Bereich $K(\mathfrak{p})$ eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{p}$ von der Ordnung e und vom Grade f eindeutig in der folgenden Form:

$$(1.) \qquad A = \pi^a \eta \qquad (\mathfrak{p})$$

dargestellt werden. Hier bedeutet π eine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{p}$, d. h. eine algebraische Zahl des betrachteten Körpers, welche nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, und

$$(1^a.) \qquad \eta = \gamma_0 + \gamma_1 \pi + \gamma_2 \pi^2 + \cdots \qquad (\mathfrak{p})$$

ist eine π-adische Einheit, deren Anfangsglied γ_0 also $\mathfrak{p}$ nicht enthält; die

Koeffizienten γ_i mögen Zahlen irgendeines vollständigen Restsystemes modulo $\mathfrak{p}$ sein, welches also $n(\mathfrak{p}) = p^f$ Elemente enthält.

Auch in diesem allgemeinsten Falle ergibt sich die gesuchte Exponentialdarstellung von A aus der obigen Gleichung, wenn es gelingt, alle Einheiten η als Potenzen von einer oder mehreren unter ihnen eindeutig darzustellen. Zu diesem Ziele führen die folgenden Betrachtungen: Ich nenne eine Einheit $\eta = \gamma_0 + \gamma_1 \pi + \cdots$ *vom nullten Grade*, wenn $\eta \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, und sage ferner, eine mit 1 beginnende sog. *Einseinheit* $\eta = 1 + \gamma_k \pi^k + \cdots$ besitzt den *k-ten Grad* für $k = 1, 2, \ldots$, wenn

(2.) $$\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^k}, \text{ aber } \eta \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}}$$

ist. Auch hier soll γ_0 bzw. $\gamma_k \pi^k$ *das Hauptglied* der betreffenden Einheit des nullten bzw. k-ten Grades genannt werden. Sind η und η' zwei Einheiten desselben k-ten Grades, wobei $k = 0, 1, 2, \ldots$ sein kann, welche dasselbe Hauptglied besitzen, so heißen sie *äquivalent*. Dies ist, wie genau ebenso wie im § 1 (2.) bewiesen wird, stets und nur dann der Fall, wenn sie sich multiplikativ um eine Einheit von höherem als dem k-ten Grade unterscheiden. Es sei nun $(\overset{(0)}{\eta})$ ein beliebiges System von $p^f - 1$ Einheiten

(3.) $$\eta_0 = \gamma_0 + \cdots,$$

in denen das Anfangsglied γ_0 ein vollständiges System von $(p^f - 1)$ modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Einheiten durchläuft, und für $k = 1, 2, \ldots$ sei $(\overset{(k)}{\eta})$ ein System von p^f Einheiten

(3ª.) $$\eta_k = 1 + \gamma_k \pi^k + \cdots,$$

in denen γ_k ein vollständiges Restsystem modulo $\mathfrak{p}$ durchläuft. Dann besteht nach dem oben bewiesenen Satze für eine beliebige Einheit η von k-tem oder höherem Grade für $k = 0, 1, 2, \ldots$ eine Gleichung

(4.) $$\eta = \eta_k \eta^{(k+1)} \qquad (\mathfrak{p}),$$

wo η_k eine eindeutig bestimmte Einheit des Systemes $(\overset{(k)}{\eta})$ ist und $\eta^{(k+1)}$ eine Einheit von $(k+1)$-tem oder höherem Grade bedeutet. Durch sukzessive Anwendung dieses Satzes und den Übergang zur Grenze erhält man dann ganz ebenso wie im § 1 den wichtigen Satz:

Jede Einheit η ist auf eine einzige Weise in der Form:

(5.) $$\eta = \eta_0 \eta_1 \eta_2 \cdots \qquad (\mathfrak{p})$$

darstellbar, wo allgemein η_i eine eindeutig bestimmte Einheit des Systemes $(\overset{(i)}{\eta})$ für den i-ten Grad bedeutet; und umgekehrt stellt jedes solche unendliche Produkt eine eindeutig bestimmte Einheit dar.

Hiernach handelt es sich also zunächst darum, für einen beliebigen Grad k ein System $(\overset{(k)}{\eta})$ durch möglichst wenig Elemente multiplikativ darzustellen. Für $k=0$ ist diese Aufgabe folgendermaßen leicht zu lösen: Jede Einheit η_0 genügt nach dem kleinen *Fermat*schen Satze der Kongruenz:

$$\eta_0^{p^f-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{6.}$$

und hieraus folgt in bekannter Weise, daß unter den p^f-1 modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Einheiten auch sog. *primitive Wurzeln* modulo $\mathfrak{p}$ existieren, für welche die (p^f-1)-te Potenz die niedrigste ist, welche kongruent 1 ist. Ist nun γ eine solche primitive Wurzel modulo $\mathfrak{p}$, so sind alle Potenzen $(1, \gamma, \gamma^2, \dots \gamma^{p^f-2})$ modulo $\mathfrak{p}$ inkongruent; sie bilden also ein vollständiges System modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenter Einheiten; dieses soll in der Folge zunächst für das System $(\overset{(0)}{\eta})$ gewählt werden. Auch bei der Entwicklung der Einheiten $\eta = \gamma_0 + \gamma_1 \pi + \cdots$ können die Koeffizienten γ_i dem Restsystem $(0, 1, \gamma, \dots \gamma^{p^f-2})$ entnommen vorausgesetzt werden. Die Untersuchungen des § 5 werden hier von selbst ein noch einfacheres System $(\overset{(0)}{\eta})$ ergeben. Ist dagegen k eine beliebige Zahl der Reihe $1, 2, \dots$, so besteht für das Produkt zweier Einheiten von k-tem oder höherem Grade immer die Gleichung:

$$(1 + \gamma_k \pi^k + \cdots)(1 + \gamma_k' \pi^k + \cdots) = 1 + (\gamma_k + \gamma_k') \pi^k + \cdots, \tag{7.}$$

aus welcher sich sofort die weitere:

$$(1 + \gamma_k \pi^k + \cdots)^c = 1 + c\gamma_k \pi^k + \cdots \tag{7a.}$$

ergibt, wenn c eine beliebige ganze rationale Zahl bedeutet. Es sei nun

$$w_1, w_2, \dots w_f \tag{8.}$$

irgend ein Fundamentalsystem für alle modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Zahlen, so daß also für jede ganze Zahl γ eine Kongruenz:

$$\gamma \equiv c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_f w_f \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (c_i = 0, 1, \cdots p-1) \tag{8a.}$$

besteht. Dann bilden die p^f Einheiten:

$$(1 + w_1 \pi^k + \cdots)^{c_1} (1 + w_2 \pi^k + \cdots)^{c_2} \cdots (1 + w_f \pi^k + \cdots)^{c_f} = 1 + \gamma \pi^k + \cdots$$

offenbar ein System $(\overset{(k)}{\eta})$ für den Grad k, wenn die Exponenten c_i unabhängig von einander die Werte $0, 1, \dots p-1$ annehmen, weil dann nach (8a.) γ ein vollständiges Restsystem modulo $\mathfrak{p}$ durchläuft; und ein solches

Produkt ist dann und nur dann von höherem als dem k-ten Grade, wenn alle Exponenten $c_i = 0$ sind. Aus diesem Grunde soll jedes solche System von f Einheiten k-ten Grades

$$(9.) \qquad (1 + w_1\pi^k + \cdots), (1 + w_2\pi^k + \cdots), \cdots (1 + w_f\pi^k + \cdots)$$

eine *Basis* für diesen Grad genannt werden.

Hieraus folgt sofort der Satz:

Ein System von f Einheiten k-ten Grades

$$(10.) \qquad \eta_i = 1 + w_i\pi^k + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots f)$$

ist stets und nur dann eine Basis für diesen Grad, wenn die Koeffizienten $(w_1, \ldots w_f)$ ihrer Hauptglieder ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ bilden.

§ 3.

Über den Zusammenhang zwischen den Basissystemen verschiedener Grade.

Ich zeige jetzt, wie sich die Basen für höhere Grade multiplikativ darstellen lassen. Es sei k irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots$ und

$$(1.) \qquad \eta = 1 + w\pi^k + \cdots$$

eine beliebige Einheit k-ten Grades. Dann ergibt sich für η^p die folgende Darstellung:

$$(1^a.) \qquad \eta^p = 1 + pw\pi^k + \cdots + w^p\pi^{kp} + \cdots,$$

wo die durch Punkte bezeichneten Glieder sämtlich von höherer Ordnung sind als eines der beiden hingeschriebenen. Da nun $p \backsim \pi^e$ ist, so besitzen jene beiden Glieder die Ordnung $k + e$ und kp; sind diese beiden Zahlen also von einander verschieden, so hat η^p das Hauptglied $pw\pi^k$ oder $w^p\pi^{kp}$ je nachdem $e + k \leqslant kp$, je nachdem also $k \gtrless \frac{e}{p-1}$ ist. Auch in dem speziellen Falle, daß $k = \frac{e}{p-1}$ ist, kann das Hauptglied von η^p im allgemeinen leicht angegeben werden. Zunächst kann dieser Fall nur eintreten, wenn $e = e^{(0)}(p-1)$ durch $p-1$ teilbar und $k = e^{(0)}$ ist. Ist dann $-p = \pi^e\gamma^g + \cdots$ die Entwicklung von $-p$, so folgt aus $(1^a.)$ die Reihe:

$$(1^b.) \qquad \eta^p = 1 + (w^p - w\gamma^g)\pi^{e+k} + \cdots;$$

falls also $(w^p - w\gamma^g)$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, besitzt η^p das Hauptglied

$$(1^c.) \qquad (w^p - w\gamma^g)\pi^{e+k}$$

Nur dann ist der Koeffizient dieses Gliedes durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so daß also η^p von höherem als dem $(e+k)$-ten Grade wird, wenn w so gewählt wird, daß

$$(2.) \qquad w^{p-1} \equiv \gamma^g \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist. Hierzu muß auch $g = g^{(0)}(p-1)$ ein Multiplum von $p-1$ sein, wie man erkennt, wenn man die obige Kongruenz zur $\frac{p^f-1}{p-1}$-ten Potenz erhebt. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann die obige Kongruenz, die sich auch in der Form:

$$(2^a.) \qquad \left(\frac{w}{\gamma^{g^{(0)}}}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

schreiben läßt, höchstens $p-1$ inkongruente Lösungen haben, und diese besitzt sie auch wirklich, da sie ja durch $\frac{w}{\gamma^{g^{(0)}}} \equiv c \pmod{\mathfrak{p}}$ für $c = 1, 2, \ldots p-1$ befriedigt wird. Allein in dem Falle also, daß der Grad $e = e^{(0)}(p-1)$ und der sog. ***Index*** $g = g^{(0)}(p-1)$ von $-p$ beide Multipla von $p-1$ sind, gibt es Einheiten k-ten Grades, deren p-te Potenz von höherem als dem pk-ten bzw. $(e+k)$-ten Grade sind, und zwar sind das die $p-1$ nicht äquivalenten Einheiten des e_0-ten Grades:

$$(3.) \quad (1 + \pi^{e^{(0)}}\gamma^{g^{(0)}} + \cdots)^c = (1 + c\pi^{e^{(0)}}\gamma^{g^{(0)}} + \cdots) \text{ für } c = 1, 2, \ldots p-1.$$

Hieraus folgt nun sofort der für die weitere Untersuchung wichtige Satz:

> Ist $(\eta_1, \ldots \eta_f)$ irgend eine Basis für einen beliebigen Grad k, so bilden die f Einheiten $(\eta_1^p, \ldots \eta_f^p)$ stets eine Basis für den Grad pk oder $e+k$, je nachdem $k \leqq \frac{e}{p-1}$ oder $k > \frac{e}{p-1}$ ist. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß $-p = (\pi^{e^{(0)}}\gamma^{g^{(0)}})^{p-1} + \cdots$ und $k = e^{(0)}$ ist.

Sind nämlich $(w_1\pi^k, \ldots w_f\pi^k)$ die Hauptglieder von $(\eta_1, \ldots \eta_f)$, so besitzen $(\eta_1^p, \ldots \eta_f^p)$ die Hauptglieder $(w_1^p\pi^{pk}, \ldots w_f^p\pi^{pk})$, wenn $k < \frac{e}{p-1}$ ist, dagegen haben sie die Hauptglieder $(pw_1\pi^k, \ldots pw_f\pi^k)$, sobald $k > \frac{e}{p-1}$ ist. Im ersten Falle bilden also $(\eta_1^p, \ldots \eta_f^p)$ eine Basis für den Grad pk, denn die Koeffizienten $(w_1^p, \ldots w_f^p)$ ihrer Hauptglieder sind offenbar ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$, weil das Gleiche n. d. V. für $(w_1, \ldots w_f)$ der Fall ist. Beachtet man beim zweiten Falle, daß $p = \pi^e\eta_p$ ist, wo η_p eine Einheit bedeutet,

so werden hier $(\eta_p w_1 \pi^{e+k}, \dots \eta_p w_f \pi^{e+k})$ die Hauptglieder von $(\eta_1^p, \dots \eta_f^p)$; also bilden $(\eta_1^p, \dots \eta_f^p)$ wieder eine Basis, jetzt aber für den Grad $e+k$, weil offenbar $(\eta_p w_1, \dots \eta_p w_f)$ dann und nur dann ein Fundamentalsystem für $\mathfrak{p}$ ist, wenn das Gleiche für $(w_1, \dots w_f)$ gilt.

Ist endlich $k = \frac{e}{p-1} = e^{(0)}$, ohne daß aber der Ausnahmefall eintritt, daß auch $g = g^{(0)}(p-1)$ ein Vielfaches von $p-1$ ist, so sind, wie vorher bewiesen wurde, die Einheiten $(\eta_1^p, \dots \eta_f^p)$ alle vom Grade $e+k = pk$, und ihre Koeffizienten

$$(4.) \qquad \xi_1 = w_1^p - w_1 \gamma^g, \dots \xi_f = w_f^p - w_f \gamma^g$$

bilden, wie jetzt leicht zu beweisen ist, wieder ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$. In der Tat kann eine Summe:

$$(4^a.) \qquad \begin{aligned} c_1 \xi_1 + \cdots + c_f \xi_f &\equiv (c_1 w_1 + \cdots + c_f w_f)^p - (c_1 w_1 + \cdots + c_f w_f)\gamma^g \\ &\equiv \xi^p - \xi \gamma^g \equiv \xi(\xi^{p-1} - \gamma^g), \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}) \end{aligned}$$

weil hier g kein Multiplum von $p-1$ ist, nur dann durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, wenn $\xi = c_1 w_1 + \cdots c_f w_f$ $\mathfrak{p}$ enthält; und dies ist, da $(w_1, \dots w_f)$ ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ ist, nur dann der Fall, wenn alle $c_i = 0$ sind, q. e. d.

Der am Schluß des Satzes hervorgehobene Fall, daß $-p = (\pi^{e^{(0)}} \gamma^{g^{(0)}})^{p-1} + \cdots$ und $k = e^{(0)}$ ist, bildet aber wirklich eine Ausnahme; denn hier sind die Koeffizienten $(\xi_1, \cdots \xi_f)$ von π^{e+k} in dem Systeme $(\eta_1^p, \dots \eta_f^p)$ in (4.) sicher kein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$, jene Potenzen selbst sind also keine Basis für den Grad $e+k$. Ist nämlich $k = e^{(0)}$ und $g = g^{(0)}(p-1)$, so wird jetzt:

$$(4^b.) \qquad c_1 \xi_1 + \cdots + c_f \xi_f \equiv \xi(\xi^{p-1} - \gamma^{g^{(0)}(p-1)})$$

nicht bloß für $\xi \equiv 0$, sondern auch für $\xi \equiv c\gamma^{g^{(0)}}$, für $c = 1, 2, \dots p-1$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Auch dieser einzige Ausnahmefall kann sehr einfach behandelt werden, wenn man die Basis $(\eta_1, \dots \eta_f)$ für den Grad $k = e^{(0)}$ durch eine geeignet gewählte äquivalente ersetzt. Ist nämlich

$$(5.) \qquad \gamma^{g^{(0)}} \equiv c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_f w_f \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$$

die Darstellung von $\gamma^{g^{(0)}}$ durch das Fundamentalsystem $(w_1, \dots w_f)$ und ist etwa $c_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, so ist auch $(\gamma^{g^{(0)}}, w_2, \dots w_f)$ ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$; es kann also von vornherein $w_1 = \gamma^{g^{(0)}}$, also $\eta_1 = 1 + \pi^{e^{(0)}} \gamma^{g^{(0)}} + \cdots$

gewählt werden, während $\eta_2, \dots \eta_f$ ihre früheren Werte behalten. Dann ist η_1^p selbst von höherem als dem $(e+k)$-ten Grade, während $\eta_2^p, \dots \eta_f^p$ genau diesen Grad haben, und ihre Koeffizienten von π^{e+k} sind jetzt

$$(6.) \qquad \xi_2 = w_2^p - w_2 w_1^{p-1}, \dots \xi_f = w_f^p - w_f w_1^{p-1}.$$

Diese $f-1$ Zahlen $(\xi_2, \dots \xi_f)$ sind nun modulo $\mathfrak{p}$ wieder insofern unabhängig, als eine Summe $c_2\xi_2 + \dots + c_f\xi_f$ nur dann durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, wenn alle Koeffizienten $c_2, \dots c_f$ Null sind. In der Tat beweist man genau wie vorher, daß

$$(6^a.) \qquad \begin{aligned} c_2\xi_2 + \dots + c_f\xi_f &\equiv \xi(\xi^{p-1} - w_1^{p-1}) \\ &\equiv \xi(\xi - w_1)(\xi - 2w_1)\cdots(\xi - (p-1)w_1) \pmod{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

ist, wo $\xi = c_2 w_2 + \dots + c_f w_f$ gesetzt wird; und die rechte Seite könnte außer für $\xi \equiv 0$ nur für $\xi \equiv c_1 w_1$ $(c_1 = 1, 2, \dots p-1)$ modulo $\mathfrak{p}$ verschwinden, was unmöglich ist.

Es sei nun ξ_1 irgend eine durch die $f-1$ Elemente $(\xi_2, \dots \xi_f)$ nicht linear darstellbare Zahl; dann bilden die f Elemente $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_f)$ zusammen ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$. Setzt man jetzt also irgend eine Einheit $(e+k)$-ten Grades mit dem Hauptgliede $\xi_1\pi^{e+k}$ gleich $\eta_1^{(p)}$, so daß

$$\eta_1^{(p)} = 1 + \xi_1\pi^{e+k} + \cdots$$

ist, so bildet diese mit den $f-1$ Einheiten $(\eta_2^p, \dots \eta_f^p)$ wieder eine Basis für den Grad $e+k$.

In diesem Ausnahmefalle erhält man also für den Grad $e+k$ eine Basis, wenn man in dem Systeme

$$(7.) \qquad (\eta_1^p, \eta_2^p, \dots \eta_f^p)$$

nur ein leicht bestimmbares Element η_1^p durch die einfach angebbare Einheit $\eta_1^{(p)}$ ersetzt, die $f-1$ übrigen aber ungeändert läßt.

§ 4.

Die Exponentialdarstellung der Einheiten durch ein Fundamentalsystem.

Die Ergebnisse des vorigen Abschnittes sollen nun zur multiplikativen Darstellung der Basissysteme $(\overset{(1)}{\eta}), (\overset{(2)}{\eta}), \dots$ für alle Grade $1, 2, \dots$ durch möglichst wenige unter ihnen benutzt werden. Es wird sich ergeben, daß dazu im allgemeinen genau e völlig bestimmte unter ihnen notwendig und ausreichend sind.

Im folgenden soll die größte in dem Bruch $\frac{e}{p-1}$ enthaltene ganze Zahl durch r bezeichnet, also

$$(1.) \qquad r = \left[\frac{e}{p-1}\right]$$

gesetzt werden. Diese Zahl ist die für diese ganze Untersuchung wichtigste Invariante des Primteilers $\mathfrak{p}$. Im allgemeinen ist immer $r = 0$; nur für die Primteiler von 2 ist r *stets* mindestens gleich 1; ist dagegen $\mathfrak{p}$ Primteiler einer ungeraden Primzahl p, so kann nur dann r positiv sein, wenn erstens $e > 1$, wenn also $\mathfrak{p}$ Diskriminantenteiler ist, und wenn zweitens p klein ist, nämlich unterhalb $e+2$, also sicher unterhalb $n+2$ liegt.

Ich sehe zunächst von dem am Schlusse des vorigen Abschnittes erwähnten einzigen Ausnahmefall ab, wo sowohl die Ordnung e als auch der Index g von $-p$ durch $(p-1)$ teilbar ist. Es sei dann k eine beliebige, aber durch p nicht teilbare ganze Zahl und $(\eta_i) = (\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_f)$ eine Basis für die Einheiten k-ten Grades. Ist dann $p^\varkappa$ die kleinste Potenz von p, für welche

$$(2.) \qquad kp^\varkappa > r = \left[\frac{e}{p-1}\right]$$

ist, dann bilden nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes die Systeme von je f Einheiten:

$$(3.) \qquad (\eta_i), (\eta_i^p), \ldots (\eta_i^{p^\varkappa}), (\eta_i^{p^{\varkappa+1}}), \ldots \qquad (\eta_i^{p^{\varkappa+\nu}}), \ldots$$

der Reihe nach Basen für die Grade:

$$(3^a.) \qquad k, \quad kp, \ldots, kp^\varkappa, \quad kp^\varkappa + e, \ldots, kp^\varkappa + \nu e, \ldots.$$

Es durchlaufe nun k alle durch p nicht teilbaren Zahlen $(k_1, k_2, \ldots)$ der Reihe

$$1, 2, \ldots r, r+1, \ldots r+e,$$

deren Anzahl bekanntlich gleich:

$$(4.) \qquad r + e - \left[\frac{r+e}{p}\right] = r + e - \left[\frac{e}{p-1}\right] = e$$

wird, da $r + e = \left[\frac{ep}{p-1}\right]$ ist. Ferner bedeute allgemein $(\overset{(k)}{\eta})$ eine Basis für jeden von diesen Graden k. Dann behaupte ich, daß die aus ihnen durch Potenzierung mit $p, p^2, \ldots$ hervorgehenden Systeme:

$$(5.) \qquad (\overset{(k)}{\eta}), (\overset{(k)p}{\eta}), (\overset{(k)p^2}{\eta}), \ldots$$

für $k = k_1, k_2, \ldots k_e$ zusammengenommen ein vollständiges System $(\overset{(1)}{\eta}), (\overset{(2)}{\eta}), \ldots$ von Basen für alle Grade $1, 2, \ldots$ bilden. Hierzu ist nur zu zeigen, daß in der obigen Reihe für jeden Grad s eine einzige Basis existiert und daß umgekehrt jedes der Systeme (5.) eine Basis für einen Grad darstellt. Der zweite Teil dieses Beweises ist auf voriger Seite in (3.) und (3^a.) bereits geführt worden.

Zum Beweise des ersten Teiles unserer Behauptung denke ich mir alle Zahlen h der Reihe $1, 2, \ldots r + e$ in der Form $h = kp^\mu$ dargestellt, wo p^μ die höchste in h enthaltene Potenz von p, also k eine der e vorher bestimmten Einheiten $k_1, k_2, \ldots k_e$ bedeutet. Ich behaupte nun, daß man dieselben e Einheiten $k_1, \ldots k_e$ erhält, wenn man nur die e Zahlen i der Reihe $(r + 1, r + 2, \ldots r + e)$ in derselben Form $i = kp^\varkappa$ darstellt. Dazu braucht man nur nachzuweisen, daß niemals zwei Zahlen i und i' dieser Reihe denselben Bestandteil k haben können. Wäre aber $r + 1 \leqq i < i' \leqq r + e$, und

$$i = kp^\varkappa, \quad i' = kp^{\varkappa'} \text{ also } \varkappa < \varkappa',$$

so müßte $\frac{i'}{i} = p^{\varkappa' - \varkappa} \geqq p$, also a fortiori, wenn der Zähler vergrößert, der Nenner verkleinert wird,

$$\frac{r+e}{r+1} \geqq p \qquad \text{oder} \qquad \frac{e}{p-1} - \left[\frac{e}{p-1}\right] \geqq \frac{p}{p-1}$$

sein, was unmöglich ist, da die linke Seite ein echter, die rechte ein unechter Bruch ist. Sind also für $i = 1, 2, \ldots e$ $k_i p^{\varkappa_i}$ diese Zerlegungen von $(r + i) = (r + 1, r + 2, \ldots r + e)$, so ist für jedes k_i $p^{\varkappa_i}$ die *kleinste* Potenz von p, für welche $k_i p^{\varkappa_i} > r$ wird. Hierdurch ist unser Beweis geführt: Bildet man nämlich für $i = 1, 2, \ldots e$ die Produkte:

$$k_i p^{\mu_i}, \qquad (\mu_i = 0, 1, \ldots \varkappa_i)$$

so erhält man alle und nur die Zahlen der Reihe $(1, 2, \ldots r + e)$ jede einmal. Also ergeben die $r + e$ Systeme

$$(6.) \qquad \left(\overset{(k_i)p^{\mu_i}}{\eta}\right) \qquad (\mu_i = 0, 1, \ldots \varkappa_i)$$

je eine Basis für die Grade $1, 2, \ldots r + e$.

Ist zweitens s irgend eine oberhalb $r + e$ liegende ganze Zahl, so ist sie eindeutig in der Form:

$$s = s_0 + \nu e$$

darstellbar, wo s_0 dem Restsysteme modulo e $(r+1, r+2, \dots r+e)$ angehört, und ν eine positive ganze Zahl bedeutet. Ist also $s_0 = kp^\varkappa$ die obige Zerlegung von s_0, so bildet das der Reihe (5.) entnommene System:

$$\binom{(k)p^{\varkappa+\nu}}{\eta}$$

eine Basis für diesen Grad s.

Damit ist bewiesen, daß zu jedem Grade s sicher eines der Systeme (5.) als Basis gehört. Mehr als ein solches System kann aber zu keinem Grade s gehören. Ist nämlich $s \leqq r+e$, und wären $\binom{(k)p^\varrho}{\eta}$ und $\binom{(k')p^{\varrho'}}{\eta}$ Basen für diesen Grad, so müßte $kp^\varrho = k'p^{\varrho'}$, also $k = k'$, $\varrho = \varrho'$ sein. Ist dagegen $s > r+e$ und $\varrho = \varkappa + \nu$, $\varrho' = \varkappa' + \nu'$, so muß

$$kp^\varkappa + \nu e = k'p^{\varkappa'} + \nu' e \qquad \text{also} \qquad kp^\varkappa \equiv k'p^{\varkappa'} \pmod{e},$$

d. h. wiederum $k = k'$, $\varkappa = \varkappa'$, $\nu = \nu'$ sein, w. z. b. w.

So erhält man jetzt eine vollständige Reihe von Basissystemen $\binom{(1)}{\eta}, \binom{(2)}{\eta}, \dots$ für alle Grade $1, 2, \dots$, dargestellt durch die Potenzen von nur e Systemen von je f Einheiten:

$$(7.) \qquad 1 + w_1\pi^{k_i},\ 1 + w_2\pi^{k_i}, \dots 1 + w_f\pi^{k_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots e)$$

deren Grade $k_1, k_2, \dots k_e$ alle Einheiten modulo p der Reihe $(1, 2, \dots r+e) = \left(1, 2, \dots \left[\frac{ep}{p-1}\right]\right)$ bedeuten, und deren Koeffizienten $(w_1, w_2, \dots w_f)$ jedesmal ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ sind. Diese $ef = \lambda$ Einheiten mögen in der natürlichen Reihenfolge ihrer Grade durch $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ bezeichnet werden, so daß die f ersten vom Grade k_1, die f folgenden vom Grade k_2 sind, usw., und es werde jetzt allgemein

$$(8.) \qquad \eta_h = 1 + w_h\pi^{k_h} \qquad (h = 1, 2, \dots \lambda)$$

gesetzt, so daß immer die f ersten Koeffizienten w_h, ebenso die f folgenden usw. je ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ bilden. Dann ist also jede s. g. Einseinheit, d. h. jede Einheit $\eta = 1 + \gamma_1\pi + \gamma_2\pi^2 + \cdots$ vom ersten oder höheren Grade, eindeutig als ein Produkt

$$\eta = \prod_{i=1}^{\lambda} \prod_{l=0}^{\infty} \eta_i^{c_{il}^{(i)}p^l}$$

darstellbar, und umgekehrt stellt jedes solche Produkt eine eindeutig bestimmte Einseinheit dar. Faßt man also wieder alle Potenzen mit gleicher Basis zusammen, so ergibt sich das folgende wichtige Resultat:

Jede Einseinheit $\eta = 1 + \gamma_1 \pi + \cdots$ läßt sich stets und nur auf eine Weise multiplikativ durch $\lambda = ef$ Einseinheiten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ in der Form:

(9.) $$\eta = \eta_1^{c_1} \eta_2^{c_2} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

mit ganzen p-adischen Koeffizienten $c_i = c_0^{(i)} + c_1^{(i)} p + c_2^{(i)} p^2 + \cdots$ darstellen, wo allgemein:

(9ª.) $$\eta_h = 1 + w_h \pi^{k_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots \lambda)$$

gewählt werden kann. Ein solches System $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda)$ soll ein Fundamentalsystem für die Darstellung der Einseinheiten von $K(\mathfrak{p})$ oder kürzer *ein Fundamentalsystem für* $K(\mathfrak{p})$ genannt werden.

Es muß jetzt noch der Ausnahmefall untersucht werden, daß $-p = (\pi^{e^{(0)}} \gamma^{g^{(0)}})^{p-1} + \cdots$ ist. Hier mache ich gleich die allgemeinste Voraussetzung, daß $p^{\nu-1}$ die höchste in der Ordnungszahl $e = e^{(0)}(p-1)$ von p enthaltene Potenz von p ist, daß also $e = e_0 p^{\nu-1}(p-1)$ ist, wo e_0 eine Einheit modulo p bedeutet. Da der Index $g = g^{(0)}(p-1)$ von $-p$ nur modulo $(p^f - 1)$ bestimmt ist, so können wir dann zugleich auch $g \equiv g_0 p^{\nu-1}(p-1) \pmod{p^f - 1}$ voraussetzen, so daß bei dieser Annahme:

(10.) $$-p = (\pi^{e_0} \gamma^{g_0})^{p^{\nu-1}(p-1)} + \cdots$$

die Entwickelung von $-p$ wird. Hier ist dann:

(10ª.) $$r = \left[\frac{e}{p-1}\right] = e_0 p^{\nu-1}, \qquad r + e = \left[\frac{ep}{p-1}\right] = e_0 p^\nu.$$

In diesem Falle kommt nun die Einheit e_0 in der Reihe $k_1, k_2, \ldots k_\lambda$ vor, da $r + e = e_0 p^\nu$ ist. Während aber für alle anderen k die p^μ-ten Potenzen $(\eta_1^{p^\mu}, \ldots \eta_f^{p^\mu})$ einer Basis für den k-ten Grad wieder Basissysteme für einen bestimmten anderen Grad sind, ist dies allein für $k = e_0$ nicht immer der Fall. Es sei nämlich $(\varepsilon_i) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_f)$ eine Basis aller Einheiten des e_0-ten Grades, welche, wie auf S. 200 (5.) bewiesen wurde, gleich so gewählt werden kann, daß ihr erstes Element

(11.) $$\varepsilon_1 = 1 + \pi^{e_0} \gamma^{g_0}$$

ist, so sind allerdings die $(\nu - 1)$ ersten Systeme:

(11ª.) $$(\varepsilon_i), \ (\varepsilon_i^p), \ (\varepsilon_i^{p^2}), \ldots (\varepsilon_i^{p^{\nu-1}})$$

bzw. Basen für die Grade:

(11ᵇ.) $$e_0, \ e_0 p, \ e_0 p^2, \ldots e_0 p^{\nu-1}.$$

Dagegen bildet das folgende System $(\varepsilon_1^{p^\nu}, \varepsilon_2^{p^\nu}, \dots \varepsilon_f^{p^\nu})$ sicher keine Basis für den Grad $e_0 p^\nu$, da ja hier:

$$\varepsilon_1^{p^{\nu-1}} = 1 + \pi^{e_0 p^{\nu-1}} \gamma^{g_0 p^{\nu-1}} + \dots = 1 + \pi^{e^{(0)}} \gamma^{g^{(0)}} + \dots,$$

also nach dem Satze (3.) auf S. 199 $\varepsilon_1^{p^\nu} = (\varepsilon_1^{p^{\nu-1}})^p$ von höherem als dem $e_0 p^\nu$-ten Grade ist. Aus demselben Grunde bilden auch die weiteren Systeme $(\varepsilon_i^{p^{\nu+1}})$, $(\varepsilon_i^{p^{\nu+2}})$, ... keine Basen für die Grade $e_0 p^\nu + e$, $e_0 p^\nu + 2e$, ..., weil ihr erstes Element immer von zu hohem Grade ist.

Diesem Mangel kann nun nach (7.) auf S. 201 leicht dadurch abgeholfen werden, daß in dem ersten Systeme $(\varepsilon_1^{p^\nu}, \varepsilon_2^{p^\nu}, \dots \varepsilon_f^{p^\nu})$, welches keine Basis darstellt, das erste Element $\varepsilon_1^{p^\nu}$ durch das andere:

$$\varepsilon_1^{(p^\nu)} = 1 + \pi^{e_0 p^\nu} \xi_1^{(\nu)} \tag{12.}$$

vom Grade $e_0 p^\nu$ ersetzt wird, dessen Koeffizient $\xi_1^{(\nu)}$ mit den entsprechenden Koeffizienten $\xi_2^{(\nu)}, \dots \xi_f^{(\nu)}$ der Hauptglieder von $\varepsilon_2^{p^\nu}, \dots \varepsilon_f^{p^\nu}$ ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ bildet. Dann bilden die f Elemente $(\varepsilon_1^{(p^\nu)}, \varepsilon_2^{p^\nu}, \dots \varepsilon_f^{p^\nu})$ eine Basis für den Grad $e_0 p^\nu$ und allgemein das System: $(\varepsilon_1^{(p^\nu)p^\varrho}, \varepsilon_2^{p^{\nu+\varrho}}, \dots \varepsilon_f^{p^{\nu+\varrho}})$ eine Basis für den Grad $e_0 p^\nu + \varrho e$.

Im folgenden bezeichne ich das eine Element $\varepsilon_1 = 1 + \pi^{e_0} \gamma^{g_0}$ durch η_0 und die λ übrigen durch $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$. Es sind also $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ genau die in (9^a.) so genannten $\eta_h = 1 + w_h \pi^{k_h}$, wo nur das jetzt durch $\eta_0 = 1 + \pi^{e_0} \gamma^{g_0}$ bezeichnete durch $\varepsilon_1^{(p^\nu)} = 1 + \xi_1^{(\nu)} \pi^{e_0 p^\nu}$ ersetzt ist. Dann folgt aus den obigen Ausführungen, daß in diesem einzigen Ausnahmefalle jede Einseinheit η eindeutig in der folgenden Form multiplikativ darstellbar ist:

$$\eta = \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}. \qquad \begin{pmatrix} c_0 = 0, 1, \dots p^\nu - 1 \\ c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} p + \dots \end{pmatrix} \tag{13.}$$

Auch hier soll daher $(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ *ein Fundamentalsystem* für den Körper $K(\mathfrak{p})$ genannt werden. Bei dieser Darstellung tritt η_0 sicher dann überhaupt nicht auf, wenn der Grad von η nicht kleiner als $e_0 p^\nu$ ist. Hieraus folgt speziell, daß η_0 selbst folgendermaßen durch die λ übrigen Einheiten ausgedrückt werden kann;

$$\eta_0^{p^\nu} = \eta_1^{-d_1} \dots \eta_\lambda^{-d_\lambda}, \tag{14.}$$

wo die Exponenten $-d_i$ ganze p-adische Zahlen bedeuten, weil die linke Seite von höherem als dem $e_0 p^\nu$-ten Grade ist. Es besteht also in diesem Falle zwischen den $\lambda + 1$ Fundamentaleinheiten stets eine Relation:

(14ª.) $$\eta_0^{p^\nu}\eta_1^{d_1}\dots\eta_\lambda^{d_\lambda}=1.$$

In dem einfachsten Körper der rationalen Zahlen für $p=2$ erhält man die in § 1 bereits angegebene Darstellung $\eta=3^b5^c$, wo $3^2=5^d$ ist.

Bei der Darstellung (13.) kann man den Exponenten von η_0 auch als eine beliebige p-adische Zahl voraussetzen, wenn man auf die Eindeutigkeit der Darstellung verzichtet. Multipliziert man nämlich diese Gleichung mit einer Potenz der linken Seite von (14ª.), welche ja gleich 1 ist, mit einem Exponenten c_0', der eine beliebige ganze p-adische Zahl sein kann, so geht sie über in:

(15.) $$\eta=\eta_0^{\bar{c}_0}\eta_1^{\bar{c}_1}\dots\eta_\lambda^{\bar{c}_\lambda},$$

wo

(15ª.) $$\bar{c}_0=c_0+p^\nu c_0', \qquad \bar{c}_i=c_i+d_ic_0' \qquad (i=1,2,\dots\lambda)$$

ist, wo also der Exponent $\bar{c}_0$ eine beliebige ganze p-adische Zahl bedeutet; und umgekehrt kann aus einer beliebigen Darstellung von η in (15.) ihre reduzierte in (13.) hergeleitet werden.

§ 5.

Die Einheitswurzeln im Körper $K(\mathfrak{p})$.

Die Untersuchung des § 1 hatte ergeben, daß der Körper $K(p)$ der rationalen p-adischen Zahlen stets genau $p-1$ $(p-1)$-te Einheitswurzeln enthält. Ich zeige als erste Anwendung der soeben durchgeführten allgemeinen Theorie, daß im Körper $K(\mathfrak{p})$ der algebraischen π-adischen Zahlen genau (p^f-1) voneinander verschiedene (p^f-1)-te Einheitswurzeln vorhanden sind, daß also in diesem Körper die Gleichung

(1.) $$x^{p^f-1}-1=0$$

genau so viele verschiedene Wurzeln besitzt, als ihr Grad angibt.

Es sei nämlich γ_0 irgend eine unter den p^f-1 modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Einheiten des Körpers $K(\mathfrak{p})$. Dann ist nach dem *Fermat*schen Satze $\gamma_0^{p^f-1}\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, d. h. $\gamma_0^{p^f-1}$ ist eine Einseinheit. Daher ist diese Potenz in der Form

(2.) $$\gamma_0^{p^f-1}=\eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\cdots\eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad (\mathfrak{p})$$

darstellbar, wo $c_0, c_1, \dots c_\lambda$ ganze p-adische Zahlen bedeuten. Setzt man

nun allgemein $\bar{c}_i = \frac{c_i}{p^f-1}$, so sind auch die $\bar{c}_i$ *ganze* p-adische Zahlen, da der gemeinsame Nenner p^f-1 eine Einheit modulo p ist. Also kann man die obige Gleichung folgendermaßen schreiben:

$$(2^a.) \qquad \gamma_0^{p^f-1} = (\eta_0^{\bar{c}_0}\eta_1^{\bar{c}_1}\dots\eta_\lambda^{\bar{c}_\lambda})^{p^f-1} = \bar{\eta}^{p^f-1} \qquad (\mathfrak{p}),$$

wo $\bar{\eta}$ wiederum eine Einseinheit ist. Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$(2^b.) \qquad \left(\frac{\gamma_0}{\bar{\eta}}\right)^{p^f-1} = 1 \qquad (\mathfrak{p}),$$

so erkennt man, daß $x_0 = \frac{\gamma_0}{\bar{\eta}_0}$ eine Einheit ist, welche der Gleichung (1.) genügt und modulo $\mathfrak{p}$ zu γ_0 kongruent ist; und da die gleiche Betrachtung für alle p^f-1 modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Einheiten $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ durchgeführt werden kann, so folgt, daß die Gleichung (1.) innerhalb $K(\mathfrak{p})$ genau p^f-1 modulo $\mathfrak{p}$ inkongruente, also voneinander verschiedene Wurzeln besitzt; und da sie in einem Körper auch nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad angibt, so ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Diese p^f-1 Einheitswurzeln $w_1, w_2, \dots$ bilden nun, wie soeben gezeigt wurde, ein vollständiges System modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenter Einheiten, oder also ein vollständiges System $(\eta^{(0)})$ für die Einheiten nullten Grades; bei der weiteren Betrachtung der Einheiten, soll dieses einfachste System (w_i) für den nullten Grad zugrunde gelegt werden. Unter den p^f-1 Einheitswurzeln gibt es nun bekanntlich stets mindestens eine s. g. *primitive Wurzel* w, deren sämtliche Potenzen $(1, w, \dots w^{p^f-2})$ alle voneinander verschieden sind, also alle p^f-1 Einheitswurzeln darstellen. Hieraus folgt also für alle Einheiten des Körpers $K(\mathfrak{p})$ die Exponentialdarstellung: $\eta = w^b \eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_\lambda^{c_\lambda}$, und für alle Zahlen A dieses Körpers die folgende:

$$(3.) \qquad A = \pi^a w^b \eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_\lambda^{c_\lambda}, \qquad (b = 0, 1, \dots (p^f-2))$$

in welcher alle Exponenten c_i ganze p-adische Zahlen sind.

Im Bereiche der rationalen dyadischen Zahlen, d. h. für den Bereich der Primzahl 2, existierte nun auch die zweite Einheitswurzel -1, während, wie leicht gezeigt werden kann, im Bereiche jeder ungeraden Primzahl p außer den $(p-1)$-ten Einheitswurzeln keine andere vorhanden ist.

Ich will jetzt gleich allgemein den Nachweis führen, daß stets und nur dann, wenn der oben erwähnte Ausnahmefall eintritt, wenn also der Grad e und der Index g von $-p$ durch $(p-1)$ teilbar ist, der Körper $K(\mathfrak{p})$ mindestens die p-ten Einheitswurzeln enthält, daß er aber in diesem Ausnahmefall auch Einheitswurzeln p^μ-ter Ordnung enthalten kann, deren Exponent μ zwischen 1 und ν liegen muß und direkt angegeben werden kann. Zunächst erkennt man sofort, daß im regulären Falle keine primitive p-te Einheitswurzel im Körper $K(\mathfrak{p})$ enthalten ist; denn soll hier

$$\eta^p = (w^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda})^p = 1 \qquad (\mathfrak{p})$$

sein, so muß ja $bp \equiv 0 \pmod{p^f - 1}$, $pc_i = 0$, also $b \equiv 0 \pmod{p^f - 1}$, $c_i = 0$, d. h. $\eta = 1$, sein.

Der angekündigte Beweis beruht auf dem folgenden Hülfssatz:

Eine Einseinheit $\eta = \eta_0^{\bar{c}_0} \eta_1^{\bar{c}_1} \dots \eta_\lambda^{\bar{c}_\lambda}$ in der nicht reduzierten Form ist dann und nur dann gleich 1, wenn

$$\eta = (\eta_0^{p^\nu} \eta_1^{d_1} \dots \eta_\lambda^{d_\lambda})^t \tag{4.}$$

ist, wo t eine beliebige ganze p-adische Zahl bedeutet.

Hat zunächst η diese Form, so ist sie wegen (14ª.) auf S. 207 gleich 1. Um auch das Umgekehrte zu beweisen, bemerke ich, daß aus den beiden Gleichungen:

$$\eta = \eta_0^{\bar{c}_0} \eta_1^{\bar{c}_1} \dots \eta_\lambda^{\bar{c}_\lambda} = 1 \qquad 1 = \eta_0^{p^\nu} \eta_1^{d_1} \dots \eta_\lambda^{d_\lambda}$$

für ein beliebiges ganzzahliges t folgt

$$\eta = \eta_0^{\bar{c}_0 - tp^\nu} \eta_1^{\bar{c}_1 - td_1} \dots \eta_\lambda^{\bar{c}_\lambda - td_\lambda} = 1.$$

Hier kann man nun t so gewählt annehmen, daß der Exponent von η_0 modulo p^ν reduziert ist; dann kann aber dieser Ausdruck nur 1 sein, wenn alle Exponenten 0, wenn also $\bar{c}_0 = tp^\nu$, $\bar{c}_i = td_i$ ist, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ich untersuche nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Einheit $\eta = w^b \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$ eine primitive p^μ-te Einheitswurzel ist. Dazu muß zunächst $w^b = 1$ sein, wie man sofort erkennt, wenn man die Gleichung $\eta^{p^\mu} = w^{bp^\mu} \eta_0^{p^\mu c_0} \dots = 1$ als Kongruenz modulo $\mathfrak{p}$ betrachtet; dann erhält man nämlich

$$w^{bp^\mu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{also} \quad w^b = 1.$$

Soll nun eine in der reduzierten Form gegebene Einseinheit $\omega = \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$

eine primitive p^μ-te Einheitswurzel sein, so muß $\omega^{p^\mu} = 1$, aber $\omega^{p^{\mu-1}} \neq 1$ sein; nach dem soeben bewiesenen Hülfssatze muß also für zwei geeignete ganzzahlige t und t'

$$(5.) \qquad \begin{aligned} \omega^{p^\mu} &= (\eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_\lambda^{c_\lambda})^{p^\mu} = (\eta_0^{p^\nu}\eta_1^{d_1}\dots\eta_\lambda^{d_\lambda})^t, \\ \omega^{p^{\mu-1}} &= (\eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_\lambda^{c_\lambda})^{p^{\mu-1}} \neq (\eta_0^{p^\nu}\eta_1^{d_1}\dots\eta_\lambda^{d_\lambda})^{t'}, \end{aligned}$$

sein, also es muß von den $2(\lambda+1)$ Gleichungen:

$$(5^a.) \qquad p^\mu c_0 = tp^\nu,\ p^\mu c_i = td_i;\ p^{\mu-1}c_0 = t'p^\nu,\ p^{\mu-1}c_i = t'd_i \quad (i = 1, 2, \dots \lambda)$$

die erste Hälfte erfüllt sein, während von der zweiten Hälfte mindestens eine nicht bestehen darf. Hieraus folgt zunächst, daß t eine Einheit modulo p sein muß, da für $t = pt'$ aus den obigen Gleichungen für den Exponenten μ durch Division mit p die entsprechenden Gleichungen für den Exponenten $(\mu-1)$ folgen würden, während diese ja nach (5a.) nicht sämtlich erfüllt sein sollen. Dann folgt aber, daß die ersten Gleichungen nur dann bestehen können, wenn p^μ ein Teiler des größten gemeinsamen Divisors (p^ν, d_i) von $p^\nu, d_1, \dots d_\lambda$ ist.

Ist nun p^μ irgendwie so gewählt und t eine beliebige p-adische Einheit, so sind die obigen Bedingungen alle erfüllt, wenn man

$$(5^b.) \qquad c_0 = tp^{\nu-\mu},\ c_i = t\frac{d_i}{p^\mu},\ \text{also } \omega = \left(\eta_0^{p^{\nu-\mu}}\eta_1^{\frac{d_1}{p^\mu}}\dots\eta_\lambda^{\frac{d_\lambda}{p^\mu}}\right)^t = \omega_0^t$$

setzt, wo $\omega_0 = \eta_0^{p^{\nu-\mu}}\eta_1^{\frac{d_1}{p^\mu}}\dots\eta_\lambda^{\frac{d_\lambda}{p^\mu}}$ eine reduzierte Einseinheit wird, welche offenbar wirklich eine primitive p^μ-te Einheitswurzel ist. Das gleiche gilt dann für jede Potenz ω_0^t, wenn t eine beliebige Einheit modulo p bedeutet.

Hieraus folgt, daß man die p^μ-ten Einheitswurzeln höchster Ordnung im Körper $K(\mathfrak{p})$ erhält, wenn man $p^\mu = (p^\nu, d_1, \dots d_\lambda)$ setzt; dann ist aber

$$(6.) \qquad \omega = \eta_0^{p^{\nu-\mu}}\eta_1^{\frac{d_1}{p^\mu}}\dots\eta_\lambda^{\frac{d_\lambda}{p^\mu}} = \eta_0^{p^{\nu-\mu}}\eta_1^{\delta_1}\dots\eta_\lambda^{\delta_\lambda}$$

eine primitive p^μ-te Einheitswurzel, und ihre Potenzen $(1, \omega, \omega^2, \dots \omega^{p^\mu-1})$ ergeben alle verschiedenen Einheitswurzeln aus $K(\mathfrak{p})$, deren Wurzelexponent eine Potenz von p ist. Der Wurzelexponent $p^\mu = (p^\nu, d_i)$ kann also höchstens gleich p^ν sein, falls die Ordnung e von $\mathfrak{p}$ genau durch $p^{\nu-1}$ teilbar ist.

Ich zeige endlich, daß dieser größte gemeinsame Teiler (p^ν, d_i) mindestens gleich p ist, daß also in der Gleichung (14a.) auf S. 207 alle Exponenten $d_1, d_2, \dots d_\lambda$ Multipla von p sind.

Dies ist eine unmittelbare Folge aus dem wichtigen, leicht beweisbaren Hülfssatz:

Ist eine Einheit $\eta = \eta_1^{c_1}\eta_2^{c_2}\cdots\eta_\lambda^{c_\lambda}$ von höherem als dem $(r+\sigma e)$-ten Grade $(\sigma = 1, 2, \ldots)$, so besitzen alle ihre Exponenten c_i mindestens die Ordnungszahl σ.

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich auch jeder einzelne Faktor $\eta_i^{c_i} = (1 + w_i\pi^{k_i})^{c_i}$ von höherem als dem $(r+\sigma e)$-ten Grade. Hat nun $c_i = p^{\delta_i}c_i^{(0)}$ die Ordnungszahl δ_i, so ist der Grad von $\eta_i^{c_i}$ gleich $k_i p^{\varkappa_i} + (\delta_i - \varkappa_i)e \leqq (r+e) + \delta_i e$, also ist a fortiori:

(7.) $\qquad r + (\delta_i + 1)e > r + \sigma e,\ \delta_i + 1 > \sigma$ also $\delta_i \geqq \sigma$,

w. z. b. w.

Da nun in unserem Falle $\eta_0^{p^\nu} = \eta_1^{-d_1}\ldots\eta_\lambda^{-d_\lambda}$ von höherem als dem $(r+e)$-ten Grade ist, so sind in der Tat alle Exponenten d_i mindestens von der ersten Ordnung; der Körper $K(\mathfrak{p})$ enthält also in dem Ausnahmefalle, daß Grad und Index von $-p$ beide Multipla von $(p-1)$ sind, wirklich mindestens die p-ten Einheitswurzeln.

Welches die in $K(\mathfrak{p})$ enthaltenen p^μ-ten Einheitswurzeln höchster Ordnung sind, kann durch eine endliche Anzahl von Versuchen stets bestimmt werden. Da nämlich $p^\mu = (p^\nu, d_i)$ ist, so genügt es, die Exponenten d_i nur modulo p^ν, d. h. ihre Näherungswerte $d_i^{(0)}$ modulo p^ν zu bestimmen; ist nämlich auch nur einer derselben von Null verschieden, so ist μ die kleinste Ordnungszahl jener Näherungswerte, sind dagegen alle $d_i^{(0)} = 0$, so ist offenbar $\mu = \nu$.

Jene Näherungswerte $d_i^{(0)}$ bestimmen sich nun leicht folgendermaßen durch eine endliche Anzahl von Rechenoperationen: Zerlegt man nach unserem sukzessiven Verfahren die Einheit $\eta_0^{p^\nu}$ vom $(r+e+1)$-ten oder höheren Grade der Reihe nach in die Einheiten des $(r+e+1)$-ten, $(r+e+2)$-ten, $\ldots$ $(r+\nu e)$-ten Grades, so ergibt sich eine Gleichung:

(8.) $\qquad \eta_0^{p^\nu} = (\eta_{r+e+1}\cdots\eta_{r+\nu e})\cdot\eta^{(r+\nu e+1)}$,

wo $\eta^{(r+\nu e+1)}$ eine Einheit von höherem als dem $(r+\nu e)$-ten Grade ist, und alle Einheiten η_{r+i} Potenzen der Fundamentaleinheiten $(\eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ bedeuten. Faßt man hier die Potenzen mit gleicher Basis zusammen, so wird die rechts stehende Klammer gleich $\eta_1^{a_1^{(0)}}\ldots\eta_\lambda^{a_\lambda^{(0)}}$, und ich behaupte, daß diese Exponenten $d_i^{(0)}$ die gesuchten ν-ten Näherungswerte sind. Da nämlich

der rechts stehende zweite Faktor $\eta^{(r+\nu e+1)}$ von höherem als dem $(r+\nu e)$-ten Grade ist, so folgt nach dem soeben bewiesenen Hülfssatze, daß bei seiner Darstellung durch das System $(\eta_1, \dots \eta_\lambda)$

$$\eta^{(\nu+\nu e+1)} = \eta_1^{p^\nu d_1'} \dots \eta_\lambda^{p^\nu d_\lambda'}$$

alle Exponenten durch p^ν teilbar sind, daß also wirklich

$$\eta_0^{p^\nu} = \eta_1^{d_1^{(0)}+p^\nu d_1'} \dots \eta_\lambda^{d_\lambda^{(0)}+p^\nu d_\lambda'}$$

wird, w. z. b. w.

Die Frage, wann im Körper $K(\mathfrak{p})$ die p-ten Einheitswurzeln enthalten sind, wird auch in anderer Weise durch den bemerkenswerten, jetzt sehr leicht beweisbaren Satz beantwortet*):

Der Körper $K(\mathfrak{p})$ enthält stets und nur dann die p-ten Einheitswurzeln, wenn $-p$ in demselben Körper eine $(p-1)$-te Potenz ist.

Enthält nämlich $K(\mathfrak{p})$ die p-ten Einheitswurzeln, so ist nach den oben bewiesenen Sätzen:

$$(9.) \qquad -p = \left(\pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}}\right)^{p-1} \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} = \left(\pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}} \eta_0^{c^{(0)}} \dots \eta_\lambda^{c^{(\lambda)}}\right)^{p-1} = \Pi^{p-1},$$

wo allgemein jedes $c^{(i)} = \frac{c_i}{p-1}$ wieder eine ganze p-adische Zahl ist. Andererseits kann die letzte Gleichung nur dann bestehen, wenn $e = e^{(0)}(p-1)$ und $g = g^{(0)}(p-1)$ Multipla von $p-1$ sind, und dann enthält ja $K(\mathfrak{p})$ auch die p-ten Einheitswurzeln.

Da die Gleichung $x^{p-1} + p = 0$ unter der obigen Annahme im Körper $K(\mathfrak{p})$ nicht bloß die eine Wurzel $x = \Pi$, sondern offenbar die $(p-1)$ verschiedenen Wurzeln $x = \bar{w}^b \Pi$ $(b = 0, 1, \dots p-2)$ besitzt, wo $\bar{w}$ eine primitive $(p-1)$-te Einheitswurzel bedeutet, so kann derselbe Satz auch in der folgenden Form ausgesprochen werden.

Die Funktion $(x^p - 1)$ zerfällt im Körper $K(\mathfrak{p})$ stets und nur dann in Linearfaktoren, wenn das gleiche für die Funktion $(x^{p-1} + p)$ gilt.

Endlich beweise ich noch, daß im Körper $K(\mathfrak{p})$ außer den $(p^l - 1)$-ten und ev. den p^u-ten Einheitswurzeln keine anderen enthalten sein können. Ist

---

*) Vergl. die Abhandlung des Herrn *G. E. Wahlin* „The equation $x^l - A = 0\,(p)$“ in diesem Journal Bd. 145 S. 114—138, in welcher dieser Satz ohne die Kenntnis der Fundamentalsysteme (η_i) a. S. 120—124 bewiesen ist.

nämlich q irgend eine von p verschiedene Primzahl, so kann nur dann eine Einheit $\eta = w^b \eta_0^{c_0} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$ eine q^ϱ-te Einheitswurzel sein, wenn

$$\eta^{q^\varrho} = w^{bq^\varrho} \eta_0^{c_0 q^\varrho} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda q^\varrho} = 1 \qquad (\mathfrak{p})$$

ist. Dazu muß nun $w^{bq^\varrho} = 1$ und außerdem

$$(\eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda})^{q^\varrho} = (\eta_0^{p^\nu} \eta_1^{d_1} \cdots \eta_\lambda^{d_\lambda})^t$$

sein. Wird also die ganze p-adische Zahl $\frac{t}{q^\varrho} = t'$ gesetzt, so muß

$$\eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda} = \eta_0^{p^\nu t'} \eta_1^{d_1 t'} \cdots \eta_\lambda^{d_\lambda t'}$$

sein. Da aber c_0 modulo p^ν reduziert angenommen werden kann, so muß $t' = 0$, also $\eta = w^b$ sein, w. z. b. w.

Im rationalen Körper $K(2)$ konnte als ein Element des Fundamentalsystemes für den Bereich von 2 die zweite Einheitswurzel -1 gewählt werden, wodurch sich die für die Anwendungen besonders bequeme Darstellung $\eta = (-1)^b 5^c$ aller dyadischen Einheiten ergab. Das entsprechende ist auch in jedem algebraischen Körper $K(\mathfrak{p})$ möglich. Um gleich den allgemeinsten Fall zu behandeln, nehme ich wieder an, daß $K(\mathfrak{p})$ nach (6.) die primitive p^μ-te Einheitswurzel

$$\omega = \eta_0^{p^{\nu-\mu}} \eta_1^{\delta_1} \cdots \eta_\lambda^{\delta_\lambda}$$

enthält, wo allgemein $\delta_i = \frac{d_i}{p^\mu}$ gesetzt ist. Dann ist die Einheitswurzel ω äquivalent $\eta_0^{p^{\nu-\mu}}$, denn sonst müßte ja nach (3.) u. (3ª.) auf S. 202 ω^{p^μ} eine Einseinheit von endlichem Grade sein. Daher kann in der Reihe $(\overset{(0)}{\eta}), (\overset{(1)}{\eta}), \ldots$ der Basissysteme für den nullten, ersten, ... Grad das Element $\eta_0^{p^{\nu-\mu}}$ und seine Potenzen $\eta_0^{p^{\nu-\mu+1}}, \ldots \eta_0^{p^{\nu-1}}$ durch die entsprechenden Potenzen $\omega, \omega^p, \omega^{p^2}, \ldots \omega^{p^{\mu-1}}$ ersetzt werden, und man erhält so für jede Einseinheit η die eindeutige Darstellung:

$$(10.) \qquad \eta = \omega^{b_0} \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}. \qquad \begin{pmatrix} b_0 = 0, 1, \ldots p^\mu - 1 \\ c_0 = 0, 1, \ldots p^{\nu-\mu} - 1 \\ c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} p + \cdots \end{pmatrix}$$

Ersetzt man endlich w und ω durch eine primitive $((p^f - 1) p^\mu)$-te Einheitswurzel β, so können alle Potenzprodukte $w^b \omega^{b_0}$ durch die Potenzen von β ersetzt werden; dann erhält man die im allgemeinsten Falle gültige eindeutige Darstellung aller π-adischen Zahlen A des Körpers $K(\mathfrak{p})$:

$$(10^{a}.) \qquad A = \pi^{a}\beta^{b}\eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_\lambda^{c_\lambda}. \qquad \begin{pmatrix} b=0,1,\dots((p^f-1)p^\mu-1) \\ c_0=0,1,\dots(p^{\nu-\mu}-1) \\ c_i=c_i^{(0)}+c_i^{(1)}p+\cdots \end{pmatrix}$$

An Stelle des Fundamentalsystemes $(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ kann man stets auch ein solches von nur λ Elementen treten lassen; dies ist im regulären Falle, wie wir in § 4 sahen, von selbst erfüllt, aber auch im Ausnahmefall, wenn nur $K(\mathfrak{p})$ die höchsten möglichen, nämlich die p^ν-ten Einheitswurzeln enthält, da dann in der obigen Darstellung (10.) $c_0 = 0$ ist, also η_0 fortfällt. Ist aber $\mu < \nu$, so kann man mit Hülfe der Gleichung $\omega = \eta_0^{p^{\nu-\mu}}\eta_1^{\delta_1}\cdots\eta_\lambda^{\delta_\lambda}$ eine der Einheiten η_i durch die übrigen und ω multiplikativ darstellen. In der Tat ist ja von den λ Exponenten $\delta_1, \dots \delta_\lambda$ dann mindestens einer, etwa δ_λ, eine Einheit, und dasselbe gilt also auch für $\delta'_\lambda = \frac{1}{\delta_\lambda}$. Erhebt man nun diese Gleichung zur Potenz δ'_λ, so ergibt sich für η_λ ein Ausdruck von der Form:

$$\eta_\lambda = \omega^{\delta'_\lambda}\eta_0^{p^{\nu-\mu}\delta'_\lambda}\eta_1^{\delta'_1}\dots\eta_{\lambda-1}^{\delta'_{\lambda-1}},$$

wo sich der Exponent von ω wegen $\omega^{p^\mu} = 1$ von selbst auf seinen μ-ten Näherungswert reduziert. Also wird in diesem Falle jede Zahl A folgendermaßen in der gewünschten Form dargestellt:

$$(10^{b}.) \qquad A = \pi^{\bar{a}}\beta^{\bar{b}}\eta_0^{\bar{c}_0}\dots\eta_{\lambda-1}^{\bar{c}_{\lambda-1}},$$

wo jetzt aber $\bar{c}_0 = c_0 + p^{\nu-\mu}\delta'_\lambda$ nicht mehr modulo $p^{\nu-\mu}$ reduziert ist, sondern, ebenso wie $\bar{c}_1, \dots \bar{c}_{\lambda-1}$, eine beliebige p-adische Zahl bedeutet.

Nur ist hier zu beachten, daß das Fundamentalsystem $(\omega, \eta_0, \eta_1, \dots \eta_{\lambda-1})$ allein in diesem letzten Falle nicht so beschaffen ist, daß seine Potenzen Basissysteme $(\overset{(1)}{\eta}), (\overset{(2)}{\eta}), \dots$ für die Grade $1, 2, \dots$ ergeben. Für manche Anwendungen, wie z. B. für die Untersuchung der algebraischen Zahlen für eine beliebige Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^{s+1}$ als Modul, welche in der nächsten Abhandlung dieser Zeitschrift gegeben werden soll, ist daher die oben gegebene Darstellung (10^a.) oder diejenige in (13.) auf S. 206 geeigneter.

Die algebraischen Einheiten des Körpers $K(\mathfrak{p})$ bilden ebenso wie die p-adischen Einheiten des rationalen Körpers $K(p)$ eine *Abel*sche Gruppe $G(\mathfrak{p})$, und ihre eindeutige Darstellung in der Form $\eta = \beta^b\eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\dots\eta_{\lambda-1}^{c_{\lambda-1}}$ zeigt, daß die $(\lambda+1)$ Elemente $(\beta, \eta_0, \eta_1, \dots \eta_{\lambda-1})$ eine Basis für dieselbe bilden. In der Tat ist ja β ein Element dieser Gruppe von dem end-

lichen Grade $(p^l - 1)p^\mu$, während die Einheiten η_i alle den Grad p^∞ besitzen; und da bei der obigen eindeutigen Darstellung aller Einheiten η der Exponent b ein vollständiges Restsystem modulo $(p^l - 1)p^\mu$, und jedes c_i ein solches modulo p^∞ durchläuft, so ist unsere Behauptung bewiesen. Aus der gleichen Darstellung ergibt sich, daß die einzigen Elemente endlichen Grades der Gruppe G die $(p^l - 1)p^\mu$ Einheitswurzeln β^b sind.

Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul.

Von Herrn *K. Hensel* in Marburg a. d. L.

---

§ 1.

Die Fundamentalsysteme für den Körper $K(\mathfrak{p})$.

In der vorstehenden Abhandlung habe ich die Zahlen eines beliebigen algebraischen Körpers für den Bereich $K(\mathfrak{p})$ irgend eines Primteilers $\mathfrak{p}$ von der e-ten Ordnung und vom f-ten Grade multiplikativ in der folgenden Form dargestellt:

$$A = \pi^a w^b \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}. \qquad \begin{pmatrix} b=0,1,\dots p^f-2 \\ c_0=0,1,\dots p^\nu-1 \\ c_i=c_i^{(0)}+c_i^{(1)}p+\cdots \end{pmatrix} \tag{1.}$$

Hier ist π eine Primzahl im Bereich $K(\mathfrak{p})$, d. h. eine nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl, w eine primitive (p^f-1)-te Einheitswurzel, welche in $K(\mathfrak{p})$ enthalten ist. Die ganzen Zahlen a und b werden *Grad* und *Index* von A genannt. Die $\lambda+1 = ef+1$ Zahlen $(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ sind Einseinheiten von $K(\mathfrak{p})$, welche ein sog. Fundamentalsystem für alle Einseinheiten dieses Bereiches bilden, weil sich jede Einseinheit η eindeutig in der Form:

$$\eta = \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} c_0=0,1,\dots p^\nu-1 \\ c_i=c_i^{(0)}+c_i^{(1)}p+\cdots \end{pmatrix} \tag{1a.}$$

darstellen läßt.

Ein solches Fundamentalsystem, dessen Bestimmung eben die Hauptaufgabe der vorigen Arbeit bildete, kann leicht angegeben werden: Im allgemeinen ist zunächst $\eta_0 = 1$, d. h. jenes System $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda)$ ent-

hält nur $\lambda = ef$ Elemente. Nur dann ist dies nicht der Fall, wenn der Grad e und der Index g von

(2.) $$-p = \pi^e w^g \eta_p,$$

beide durch $(p-1)$ teilbar sind. Ist dann $p^{\nu-1}$ die höchste in e enthaltene Potenz von p, so daß $e = e_0 p^{\nu-1}(p-1)$, und daß also

(2ª.) $$-p = (\pi^{e_0} w^{g_0})^{p^{\nu-1}(p-1)} + \dots$$

die Entwicklung von $-p$ nach Potenzen von π ist, so hängt das Element η_0 mit den λ übrigen durch eine Gleichung:

(3.) $$\eta_0^{p^\nu} \eta_1^{d_1} \dots \eta_\lambda^{d_\lambda} = 1$$

zusammen.

In dem allgemeinen Falle kann nun ein besonders einfaches Fundamentalsystem $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda)$ sofort angegeben werden: Es sei nämlich $(w^{(1)}, w^{(2)}, \dots w^{(f)})$ ein beliebiges Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ für die ganzen Zahlen von $K(\mathfrak{p})$, und es bedeute $(k^{(1)}, k^{(2)}, \dots k^{(e)})$ ein vollständiges System aller Einheiten modulo p in der Reihe $1, 2, \dots r+e$, wo, wie in der vorigen Arbeit, $r = \left[\frac{e}{p-1}\right]$, also $r + e = \left[\frac{ep}{p-1}\right]$ ist; dann bilden die ef Einseinheiten

(4.) $$1 + w^{(i)} \pi^{k^{(l)}} \qquad \binom{i=1,2,\dots f}{l=1,2,\dots e}$$

von den Graden $k^{(1)}, \dots k^{(e)}$ ein solches Fundamentalsystem $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda)$.

Tritt dagegen jener Ausnahmefall ein, ist also

(5.) $$e = e_0 p^{\nu-1}(p-1),\ g = g_0 p^{\nu-1}(p-1),\ \text{mithin}\ \left[\frac{ep}{p-1}\right] = e_0 p^\nu,$$

so ist auch die Einheit e_0 in der Reihe $1, 2, \dots \left[\frac{ep}{p-1}\right]$ enthalten, mithin eine der Zahlen $k^{(l)}$; also kann als eine der f zum Grade e_0 gehörigen Einheiten:

(6.) $$\eta = 1 + w^{g_0} \pi^{e_0}$$

gewählt werden, welche dann in (1ª.) gleich der Einheit η_0 zu setzen ist. Dann wird a. a. O. S. 205 unten gezeigt, daß die Potenzen:

$$\eta, \eta^p, \dots \eta^{p^{\nu-1}}$$

Einseinheiten sind, welche die Grade

$$e_0, e_0 p, \dots e_0 p^{\nu-1}$$

besitzen, wie dies die allgemeine Theorie vorschreibt, daß aber die weiteren Potenzen $\eta^{p^\nu}, \eta^{p^{\nu+1}}, \dots$ nicht, wie es sein sollte, die Grade $e_0 p^\nu$, $e_0 p^\nu + e$, $e_0 p^\nu + 2e, \dots$, sondern höhere Grade haben, und daß daher zwar diese ν

ersten, aber nicht die höheren Potenzen zur Bildung des Fundamentalsystems benutzt werden können. Die so entstehende Lücke kann nun dadurch ausgefüllt werden, daß statt η^{p^ν} eine neue Einseinheit des $e_0 p^\nu$-ten Grades

$$\eta^{(p^\nu)} = 1 + \xi \pi^{e_0 p^\nu} \tag{7.}$$

hinzugenommen wird, deren Koeffizient ξ stets geeignet ausgewählt werden kann; dann sind ihre Potenzen $(\eta^{(p^\nu)})^{p^\varrho}$ vom Grade $e_0 p^\nu + \varrho e$. Die aus diesen beiden Einseinheiten durch sukzessives Potenzieren mit dem Exponenten p gebildeten Einseinheiten:

$$\eta,\quad \eta^p, \ldots \eta^{p^{\nu-1}};\quad \eta^{(p^\nu)},\quad \eta^{(p^\nu)p},\quad (\eta^{p^\nu})^{p^2}, \ldots \tag{8.}$$

haben also bezw. die Grade

$$e_0, e_0 p, \ldots e_0 p^{\nu-1};\ e_0 p^\nu, e_0 p^\nu + e, e_0 p^\nu + 2e, \ldots, \tag{8^a.}$$

und sie können zusammen, genau wie im regulären Falle alle Potenzen einer Einheit, zur Bildung des Fundamentalsystemes benutzt werden. So ergibt sich für diese beiden Einheiten eine Potenz:

$$\eta^{c_0 + c_1 p + \cdots + c_{\nu-1} p^{\nu-1}} \eta^{(p^\nu)(c_\nu + c_{\nu+1} p + \cdots)} = \eta^{c^{(0)}} \cdot \eta^{(p^\nu)c'},$$

wo $c^{(0)}$ der Reihe $(0, 1, \ldots p^\nu - 1)$ angehört, während c' eine bestimmte ganze p-adische Zahl bedeutet. Die rechte Seite schreibe ich kürzer in der Form $\eta^{c^{(0)} + p^\nu c'} = \eta^c$, indem ich festsetze, daß die ganze p-adische Zahl $c = c^{(0)} + p^\nu c' = c_0 + c_1 p + \cdots + c_\nu p^\nu + \cdots$ in die Summe $c^{(0)} + p^\nu c'$ zerlegt und nachher $\eta^{c^{(0)} + p^\nu c'} = \eta^{c^{(0)}} \cdot \eta^{p^\nu c'} = \eta^{c^{(0)}} \cdot \eta^{(p^\nu)c'}$ gesetzt werden soll. Dann entspricht jedem Produkt $\eta^{c^{(0)}} \eta^{(p^\nu)c'}$ eine und nur eine symbolische Potenz η^c der ursprünglichen Einheit $\eta = 1 + w^{g_0} \pi^{e_0}$ und umgekehrt. Bei dieser Festsetzung ist also stets eine beliebige Zahl A von $K(\mathfrak{p})$ durch die Einheiten (4.) multiplikativ eindeutig darstellbar, und die λ Elemente $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda$ des Fundamentalsystemes sind immer diesen Einheiten gleich. Die Exponenten c_i sind jedesmal eindeutig bestimmte ganze p-adische Zahlen. Der einzige Unterschied bei dem Ausnahmefall (2^a.) ist der, daß ein einziger jener Exponenten c in die Summe $c^{(0)} + p^\nu c^{(1)}$ zerlegt und dann die Potenz η^{p^ν} durch die $(\lambda + 1)$-te Einheit $\eta^{(p^\nu)}$ in (7.) ersetzt werden muß.

Die $\lambda = ef$ Elemente $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda)$ sollen nun in der Weise numeriert werden, daß die ersten f Elemente $\eta_1 \ldots \eta_f$ alle den niedrigsten Grad $k_1 = k_2 = \ldots = k_f = k^{(1)}$, die f folgenden den nächstniederen Grad $k^{(2)}$, usw.

besitzen, und die f zu demselben Grade $k^{(i)}$ gehörigen Koeffizienten $(w_1, \dots w_f)$, $(w_{f+1}, \dots w_{2f})$, ... jedesmal das Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ $(w^{(1)}, \dots w^{(f)})$ durchlaufen.

§ 2.

Die Fundamentalsysteme für die Kongruenzklassengruppe modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$.

Das Fundamentalsystem $(w, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ hat die besondere Eigenschaft, daß sich aus den Potenzen seiner Elemente Basissysteme für die Einheiten des nullten, ersten, zweiten, ... Grades bilden lassen, so daß aus ihnen eine Reihe $(\overset{(0)}{\eta})$, $(\overset{(1)}{\eta})$, $(\overset{(2)}{\eta})$, ... nicht äquivalenter Systeme für die Grade $0, 1, 2, \dots$ multiplikativ zusammengesetzt werden kann. Hieraus ergab sich für jede Einheit η des Bereiches $K(\mathfrak{p})$ eine eindeutige Darstellung:

$$\eta = \eta^{(0)} \cdot \eta^{(1)} \cdot \eta^{(2)} \dots, \qquad (\mathfrak{p}) \tag{1.}$$

wo $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots$ eindeutig bestimmte Elemente der Systeme $(\overset{(0)}{\eta})$, $(\overset{(1)}{\eta})$, ..., also bestimmte Potenzen der Elemente $(w, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ sind.

Es sei nun $\mathfrak{p}^{s+1}$ eine beliebige Potenz unseres Primteilers, und wir stellen uns die Aufgabe, alle Einheiten η von $K(\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ zu untersuchen und sie ebenso eindeutig multiplikativ darzustellen, wie dies in der vorigen Arbeit für den Bereich von $\mathfrak{p}$ gelungen war. Betrachtet man nun die obige Gleichung (1.) als Kongruenz modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$, so werden alle Einheiten $\eta^{(s+1)}$, $\eta^{(s+2)}, \dots$ kongruent 1; hiernach geht also diese Gleichung über in:

$$\eta \equiv \eta^{(0)} \eta^{(1)} \dots \eta^{(s)} \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}, \tag{1a.}$$

und auch diese Darstellung ist eindeutig, da sich aus zwei kongruenten Darstellungen derselben Einheit η

$$\eta \equiv \eta^{(0)} \dots \eta^{(i-1)} \eta^{(i)} \dots \eta^{(s)} \equiv \eta^{(0)} \dots \eta^{(i-1)} \bar{\eta}^{(i)} \dots \bar{\eta}^{(s)} \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}, \tag{1b.}$$

in denen $\eta^{(i)}$ und $\bar{\eta}^{(i)}$ die ersten verschiedenen Faktoren sein mögen, leicht die Kongruenz

$$\eta^{(i)} \equiv \bar{\eta}^{(i)} \pmod{\mathfrak{p}^{i+1}}$$

ergibt, welche für verschiedene Einheiten des Systemes $(\overset{(i)}{\eta})$ unmöglich erfüllt sein kann. Es ergibt sich also der Satz:

Jede Einheit des Bereiches $K(\mathfrak{p})$ ist einer einzigen unter den $\Phi(\mathfrak{p}^{s+1}) = (p^f - 1)p^{sf}$ Einheiten

$$\eta^{(0)} \eta^{(1)} \dots \eta^{(s)} \tag{2.}$$

modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ kongruent, wenn die Elemente $\eta^{(i)}$ den Systemen

$(\overset{(0)}{\eta}), (\overset{(1)}{\eta}), \ldots (\overset{(s)}{\eta})$, von je $(p^f-1), p^f, \ldots p^f$ nicht äquivalenten Einheiten des nullten, ersten, ... s-ten Grades entnommen sind.

Drückt man nun diese Faktoren $\eta^{(a)}$ durch die Potenzen $\eta_i, \eta_i^p, \eta_i^{p^2}, \ldots$ unseres Fundamentalsystemes aus, so sind alle und nur die Potenzen $\eta_i^{p^{f_i}}$ fortzulassen, welche kongruent Eins modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ sind, denn allein ihr Grad ist größer als s. Ist also $P_i = p^{\mu_i}$ der kleinste positive Exponent, für welchen

$$\eta_i^{P_i} = \eta_i^{p^{\mu_i}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}} \tag{3.}$$

ist, d. h. ist P_i der Exponent, zu dem die Einheit η_i modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehört, so kann aus der obigen Darstellung unmittelbar der folgende Satz abgelesen werden:

Jede Einheit η des Körpers $K(\mathfrak{p})$ ist modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ eindeutig in der Form:

$$\eta \equiv w^b \eta_1^{c_1} \eta_2^{c_2} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} b=0,1,\ldots(p^f-2) \\ c_i=0,1,\ldots(p^{\mu_i}-1) \end{pmatrix} \tag{4.}$$

darstellbar, wo allgemein $P_i = p^{\mu_i}$ der Exponent ist, zu dem η_i modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehört.

Die Einheiten η des Körpers $K(\mathfrak{p})$, modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ betrachtet, bilden eine *Abel*sche Gruppe G_{s+1} des Grades $\Phi(\mathfrak{p}^{s+1}) = (p^f-1)p^{fs}$; auf sie sind also die Ergebnisse der allgemeinen Gruppentheorie anwendbar. Tritt der oft erwähnte Ausnahmefall, daß in $K(\mathfrak{p})$ die p-ten Einheitswurzeln enthalten sind, *nicht* ein, so folgt aus dem vorigen Satze das merkwürdige und wichtige Theorem:

Für jede Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^{s+1}$ bilden die $(\lambda+1)$ Zahlen $(w, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda)$ stets eine Basis für die zugehörige *Abel*sche Gruppe G_{s+1}.

Denn diese Zahlen gehören ja modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ zu den Exponenten $(p^f-1), p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots p^{\mu_\lambda}$, und nach dem vorigen Satze ist jedes Element η der Gruppe G_{s+1} eindeutig in der Form (4.) dargestellt, wo $b, c_1, \ldots c_\lambda$ volle Restsysteme nach den Moduln $p^f-1, p^{\mu_1}, \ldots p^{\mu_\lambda}$ durchlaufen. Hiernach sind also $(p^f-1), P_1, \ldots P_\lambda$ die sämtlichen Invarianten der Gruppe G_{s+1}, und diese ist somit völlig durch die für alle Potenzen $\mathfrak{p}^{s+1}$ feste Basis $(w, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ und durch diese Invarianten bestimmt.

Ich wende mich nun zur Bestimmung dieser Invarianten $P_1, P_2, \ldots P_\lambda$ und bemerke dabei, daß die im nächsten Paragraphen gefundenen Ergebnisse auch für den Ausnahmefall gültig sind.

Da zunächst die Anzahl aller Elemente in (4.) einmal gleich $(p^f-1)\cdot p^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda}$, das andere Mal $\Phi(\mathfrak{p}^{s+1})=(p^f-1)p^{fs}$ ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\lambda=fs. \tag{5.}$$

Da ferner von den ef Einheiten η_i immer je f gleichen Grad k_i haben und somit auch zu demselben Exponenten p^{μ_i} gehören, so sind auch unter diesen Exponenten immer je f gleiche. Sind also $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots \mu^{(e)}$ die e zu den verschiedenen Einheiten $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(e)}$ gehörigen Exponenten, so folgt für sie aus (5.) die einfachere Gleichung:

$$\mu^{(1)}+\mu^{(2)}+\cdots+\mu^{(e)}=s. \tag{5*.}$$

§ 3.

Die Invarianten der Kongruenzklassengruppe modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$.

Bei der nun folgenden Untersuchung der λ Invarianten $p^{\mu_1}, \ldots p^{\mu_\lambda}$ sind die beiden Fälle zu trennen, daß der Exponent $s+1$ des Moduls nicht größer als $r+e=\left[\frac{ep}{p-1}\right]$ und daß er größer als $r+e$ ist.

Ist zuerst $s+1\leqq r+e$, so gehört eine Fundamentaleinheit η_i modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ zum Exponenten p^{μ_i}, wenn dies die kleinste Potenz von p ist, wofür

$$\eta_i^{p^{\mu_i}}=(1+w_i\pi^{k_i})^{p^{\mu_i}}=1+w_i^{p^{\mu_i}}\pi^{k_ip^{\mu_i}}+\cdots\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}},$$

also $k_ip^{\mu_i}\geqq s+1$ oder $p^{\mu_i}>\frac{s}{k_i}$ ist.

Es ergibt sich also der folgende Satz:

Die Invarianten $p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots p^{\mu_\lambda}$ sind diejenigen kleinsten Potenzen von p, welche oberhalb der Brüche $\frac{s}{k_1}, \frac{s}{k_2}, \ldots \frac{s}{k_\lambda}$ liegen.

Um nun die Hauptfrage zu entscheiden, wie viele und welche Einheiten η_i zu einem und demselben Exponenten p^μ gehören, untersuche ich zunächst, für wieviele und welche von ihnen der Exponent, zu dem sie gehören, größer als die beliebig gegebene Potenz p^μ ist. Dazu muß also:

$$\eta_i^{p^\mu}=1+w_i^{p^\mu}\pi^{k_ip^\mu}+\cdots\not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}},$$

d. h. es muß für den Grad k_i die Ungleichung bestehen:

$$k_i p^\mu \leqq s, \qquad k_i \leqq \left[\frac{s}{p^\mu}\right].$$

Die Anzahl aller Fundamentaleinheiten η_i, deren Exponent $p^{\mu_i} > p^\mu$ ist, ist daher das f-fache der Anzahl aller Einheiten k_i in der Reihe $1, 2, \ldots \left[\frac{s}{p^\mu}\right]$; jene Anzahl ist also

$$(1.) \qquad \left(\left[\frac{s}{p^\mu}\right] - \left[\frac{s}{p^{\mu+1}}\right]\right) f.$$

Da sich die entsprechende Anzahl für die nächst niedere Potenz $p^{\mu-1}$ offenbar gleich $\left(\left[\frac{s}{p^{\mu-1}}\right] - \left[\frac{s}{p^\mu}\right]\right) f$ ergibt, so wird die Differenz

$$(1^a.) \qquad A_\mu = \left(\left[\frac{s}{p^{\mu-1}}\right] - 2\left[\frac{s}{p^\mu}\right] + \left[\frac{s}{p^{\mu+1}}\right]\right) f$$

jener beiden Zahlen die Anzahl aller Einheiten η_i, deren Exponent p^{μ_i} genau gleich p^μ ist, denn diese ist ja die Anzahl aller η_i, deren Exponent größer als $p^{\mu-1}$ ist, vermindert um die Anzahl derjenigen, deren Exponent größer als p^μ ist; und zwar gehören alle und nur die $\eta_i = 1 + w_i \pi^{k_i}$ zu diesem Exponenten p^μ, deren Grad k_i der Ungleichung

$$(1^b.) \qquad \left[\frac{s}{p^\mu}\right] < k \leqq \left[\frac{s}{p^{\mu-1}}\right]$$

genügt.

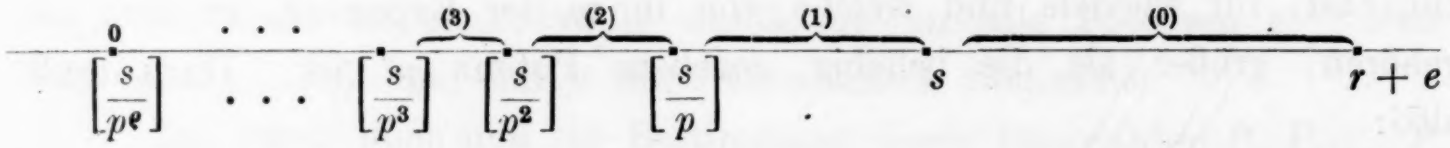
Um also die zu allen verschiedenen Einheiten $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(e)}$ zugehörigen Exponenten $p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots p^{\mu_e}$ einfach zu bestimmen, fixiere man auf einer Zahlenlinie die Punkte mit den ganzzahligen Abszissen:

$$(2.) \qquad r + e,\ s,\ \left[\frac{s}{p}\right], \left[\frac{s}{p^2}\right], \ldots \left[\frac{s}{p^e}\right] = 0,$$

wenn p^e die kleinste oberhalb von s liegende Potenz von p ist. Durch je zwei aufeinanderfolgende Punkte werden dann $\varrho + 1$ Intervalle

$$(2^a.) \qquad (0), (1), (2), \ldots \ (\varrho)$$

abgegrenzt, wobei festgesetzt werde, daß jedem dieser Intervalle der rechte aber nicht der linke Begrenzungspunkt zugerechnet werden soll.



Dann gehören alle und nur die Einheiten $\eta_i = 1 + w_i \pi^{k_i}$, deren Gradzahlen k_i als Punkte in den Intervallen $(0), (1), (2), \ldots (\varrho)$ vorkommen, zu den

Exponenten $1, p, p^2, \dots p^e$. Die dem Intervalle Null entsprechenden Einheiten η_i kommen, da sie zum Exponenten 1 gehören, in dem Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ nur scheinbar vor. Die Anzahl der hier wirklich auftretenden Fundamentaleinheiten ist offenbar $\left(s - \left[\frac{s}{p}\right]\right)f$. Dann und nur dann treten im Fundamentalsystem alle λ Elemente $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ wirklich auf, wenn $s \geqq k_e$ ist, weil dann im Intervalle (0) keine Einheit enthalten ist.

Legt man speziell den Modul $\mathfrak{p}^{r+1}$ zugrunde, setzt also $s = r$, so gehört jede Einheit $\eta_i = (1 + w_i \pi^{k_i})$ zum Exponenten $\varkappa_i$, da ja $p^{\varkappa_i}$ die niedrigste Potenz von p war, wofür $k_i p^{\varkappa_i} > r$ ist. Die Anwendung der allgemeinen Gleichung (5^a.) auf S. 221 auf diesen speziellen Fall ergibt hier also die Gleichung:

$$(3.) \qquad \varkappa^{(1)} + \varkappa^{(2)} + \dots + \varkappa^{(e)} = r = \left[\frac{e}{p-1}\right].$$

Als Beispiel betrachte ich den Fall $p = 2, s = 37, f = 1$. Hier geschieht die Einteilung des Zahlengebietes $1, 2, \dots 37$ durch die Grenzpunkte:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 37, & & \left[\frac{37}{2}\right], & & \left[\frac{37}{4}\right], & & \left[\frac{37}{8}\right], & & \left[\frac{37}{16}\right], & & \left[\frac{37}{32}\right], & & \left[\frac{37}{64}\right] \\ \underbrace{37,} & & \underbrace{18} & , & \underbrace{9} & , & \underbrace{4} & , & \underbrace{2} & , & \underbrace{1} & , & \underbrace{0} \end{array}.$$

Bestimmt man also die Anzahl der Einheiten modulo 2, d. h. der ungeraden Zahlen, in den durch die Klammern angedeuteten Intervallen, so erkennt man, daß für den Modul $\mathfrak{p}^{38}$ im Körper $K(\mathfrak{p})$ ein Fundamentalsystem von $37 - \left[\frac{37}{2}\right] = 19$ Elementen $\eta_1, \dots \eta_{19}$ besteht, von denen bzw. 10, 4, 3, 1, 0, 1 zu den Exponenten $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ gehören.

Ich nehme jetzt zweitens an, daß $s + 1 > r + e$ ist, und es sei:

$$s + 1 = s_0 + me. \qquad (s_0 = r+1, \dots r+e)$$

Dann wird die ganze Reihe $(r + 1, \dots r + e)$ durch s_0 in zwei Teile $(r + 1, r + 2, \dots (s_0 - 1))$ und $(s_0, s_0 + 1, \dots r + e)$ geteilt, die ich kurz als das erste und zweite Intervall bezeichnen will.

Dann gehört eine Fundamentaleinheit $\eta_i = (1 + w_i \pi^{k_i})$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ zum Exponenten p^{μ_i}, wenn dies die kleinste Potenz von p ist, für welche

$$\eta_i^{p^{\mu_i}} = (1 + w_i \pi^{k_i})^{p^{\mu_i}} = 1 + \overline{w}_i \pi^{l_i + (\mu_i - \varkappa_i)e} + \dots \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$$

ist, wo zur Abkürzung die im Intervalle $(r + 1, \dots r + e)$ liegende Zahl

(4.) $$k_i p^{\varkappa_i} = l_i$$

gesetzt wird. Also ist μ_i die kleinste Zahl, wofür $l_i + (\mu_i - \varkappa_i)e \geqq s+1 = s_0 + me$, oder wofür

(5.) $$(l_i - s_0) + (\mu_i - \varkappa_i - m)e \geqq 0$$

ist. Die erste Differenz ist eine ganze Zahl, deren absoluter Wert kleiner als e ist, und welche selbst negativ oder nicht negativ ist, je nachdem l_i im ersten oder im zweiten Intervalle liegt; der zweite Teil ist stets ein Multiplum von e. Also muß μ_i so gewählt werden, daß der zweite Teil $+ e$ oder 0 wird, je nachdem l_i im ersten oder im zweiten Intervalle liegt. Hieraus ergibt sich also der Satz, durch den unsere Frage auch im zweiten Falle vollständig und einfach beantwortet wird:

Ist $\eta_i = (1 + w_i \pi^{k_i})$ eine beliebige Fundamentaleinheit und $l_i = k_i p^{\varkappa_i}$, so besitzt η_i modulo $\mathfrak{p}^{s+1} = \mathfrak{p}^{s_0+me}$ den Grad $p^{\mu_i} = p^{\varkappa_i + m + \delta_i}$, wo $\delta_i = 1$ oder 0 ist, je nachdem l_i dem Intervalle $(r+1, \ldots s_0 - 1)$ oder $(s_0, \ldots r+e)$ angehört.

Auch hier ergibt sich für die Summe aller ef Ordnungszahlen μ_i unter Benutzung von (3.) leicht:

(6.) $$\Sigma\mu_i = \Sigma\varkappa_i + efm + \Sigma\delta_i = f(s_0 + em - 1) = fs$$

in Übereinstimmung mit der allgemeinen Formel (5.) a. S. 221.

§ 4.

Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzklassen-Invarianten für zwei aufeinanderfolgende Moduln $\mathfrak{p}^{s+1}$ und $\mathfrak{p}^{s+2}$.

Es ist interessant zu untersuchen, wie sich die im vorigen Paragraphen bestimmten Invarianten $P_i = p^{\mu_i}$ ändern, wenn man von einem Modul $\mathfrak{p}^{s+1}$ zum nächstfolgenden $\mathfrak{p}^{s+2}$ übergeht. Sind

$$P_1, P_2, \ldots P_\lambda \quad \text{und} \quad P_1', P_2', \ldots P_\lambda'$$

diese Invarianten für die Moduln $\mathfrak{p}^{s+1}$ und $\mathfrak{p}^{s+2}$, und berücksichtigt man, daß nach (5.) auf S. 221 das Produkt der λ ersten gleich $n(\mathfrak{p}^s)$, das der zweiten gleich $n(\mathfrak{p}^{s+1})$ ist, so ergibt sich, daß zwischen den Invariantenprodukten für je zwei aufeinanderfolgende Primteilerpotenzen stets die Gleichung

(1.) $$(P_1' \cdots P_\lambda') = (P_1 \cdots P_\lambda)\, n(\mathfrak{p})$$

besteht, daß also jenes Produkt beim Übergange von einem Modul $\mathfrak{p}^{s+1}$ zum benachbarten $\mathfrak{p}^{s+2}$ um den Faktor $n(\mathfrak{p}) = p^f$ zunimmt.

Es ist nun zunächst, falls $s+1 > r+e$ ist, sehr leicht, die Änderung der einzelnen Invarianten

$$P_i = p^{\varkappa_i + m + \delta_i}$$

anzugeben, wenn der Modulexponent

(2.) $$s+1 = s_0 + me \quad \text{in} \quad s+2 = s_0 + 1 + me$$

übergeht. Hier ändern sich nämlich jedesmal nur f Invarianten P_i um den Faktor p, nämlich die, welche dem Werte $l_i = k_i p^{\varkappa_i} = s_0$ entsprechen, während alle übrigen ungeändert bleiben.

Ist nämlich zunächst $s_0 < r+e$, so geht bei dem Übergange von $s_0 + me$ in $(s_0+1)+me$ nur die Intervallgrenze s_0 in s_0+1 über, während m ungeändert bleibt. Also bleibt in allen Exponenten $(\varkappa_i + m + \delta_i)$ der Invarianten P_i die Zahl m ungeändert, und allein für die f Invarianten, für welche $l_i = k_i p^{\varkappa_i} = s_0$ ist, geht δ_i von 0 in 1 über, da nur dieses l_i vor dem Übergange dem zweiten Intervalle $(s_0, \dots r+e)$ angehörte, nach demselben aber in dem neuen ersten Intervalle $(r+1, \dots ((s_0+1)-1))$ vorkommt. Ist dagegen zweitens $s_0 = r+e$, so geht bei dem Fortschreiten von $\mathfrak{p}^{s+1}$ zu $\mathfrak{p}^{s+2}$ der Ausdruck $(r+e)+me$ in $(r+1)+(m+1)e$ über, d. h. es verwandelt sich m in $m+1$, während die Intervallgrenze s_0 von $r+e$ in $r+1$ übergeht. Vorher umfaßt also das erste Intervall alle Zahlen außer der letzten $r+e$, nachher gehört die ganze Reihe $(r+1, \dots r+e)$ dem zweiten Intervalle an, so daß für alle Zahlen außer der letzten δ_i von 1 zu 0 übergeht, während allein für die letzte Zahl $r+e$ δ_i ungeändert Null bleibt. Also bleiben alle Exponenten für $l_i = r+1, \dots r+e-1$ ungeändert, da sie von $\varkappa_i + m + 1$ in $\varkappa_i + (m+1) + 0$ übergehen, während allein für $l_i = r+e = s_0$ $\varkappa_i + m + 0$ in $\varkappa_i + (m+1) + 0$ übergeht, so daß sich allein diese f Exponenten um je eine Einheit vermehren. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Völlig anders gestaltet sich dieser Übergang vom Modul $\mathfrak{p}^{s+1}$ zu $\mathfrak{p}^{s+2}$, wenn $s+1 \leqq r+e$ ist. Hier entspricht dem ersten Modul die Teilung der Zahlenlinie in die Intervalle (1), (2), ... mit den Teilpunkten

(3.) $$s, \left[\frac{s}{p}\right], \left[\frac{s}{p^2}\right], \dots,$$

dem zweiten diejenige (1′), (2′) ... mit den Punkten

$$(3^a.) \qquad (s+1), \left[\frac{s+1}{p}\right], \left[\frac{s+1}{p^2}\right], \ldots .$$

Die in den einzelnen Abschnitten liegenden Einheiten k_i sind die Grade derjenigen Fundamentaleinheiten η_i, deren Invarianten P_i bzw. gleich $p, p^2, p^3, \ldots$ sind. Zur Vergleichung dieser beiden Intervallreihen führt unmittelbar der folgende Hülfssatz:

Sind a und $a-1$ zwei beliebige aufeinanderfolgende ganze Zahlen, deren erste eine Einheit modulo p ist, so ist stets:

$$(4.) \qquad \left[\frac{a}{p}\right] = \left[\frac{a-1}{p}\right].$$

Ist dagegen $a = p^\alpha \bar{a}$, wo $\bar{a}$ eine Einheit ist, und p^δ eine in a enthaltene Primzahlpotenz ($\delta \leqq \alpha$), so ist

$$(4^a.) \qquad \left[\frac{a}{p^\delta}\right] = \left[\frac{a-1}{p^\delta}\right] + 1.$$

Ist nämlich im ersten Falle $a = a_0 + a_1 p$, so ist $a_0 > 0$, also $a-1 = (a_0-1) + a_1 p$, woraus die erste Gleichung folgt. Die Richtigkeit der zweiten ergibt sich unmittelbar aus:

$$\left[\frac{a-1}{p^\delta}\right] = \left[p^{\alpha-\delta}\bar{a} - \frac{1}{p^\delta}\right] = p^{\alpha-\delta}\bar{a} - 1 = \left[\frac{a}{p^\delta}\right] - 1.$$

Es sei nun p^σ die höchste im Exponenten $s+1$ des ersten Moduls enthaltene Potenz von p; dann bestehen nach dem soeben bewiesenen Hülfssatze zwischen den Grenzen der Intervalle (1), (2), ... und (1′), (2′), ... die Gleichungen:

$$s+1 = (s)+1, \left[\frac{s+1}{p}\right] = \left[\frac{s}{p}\right]+1, \ldots \left[\frac{s+1}{p^\sigma}\right] = \left[\frac{s}{p^\sigma}\right]+1; \left[\frac{s+1}{p^{\sigma+1}}\right] = \left[\frac{s}{p^{\sigma+1}}\right], \ldots,$$

d. h. die Intervalle (1), (2), ... (σ) werden ohne Änderung ihrer Größe um eine Einheit nach rechts verschoben, während alle übrigen Endpunkte ungeändert bleiben. Nur das Intervall ($\sigma+1$) vergrößert sich also, und zwar genau um eine Einheit.

Die Anzahl

$$A_\mu = \left(\left[\frac{s}{p^{\mu-1}}\right] - 2\left[\frac{s}{p^\mu}\right] + \left[\frac{s}{p^{\mu+1}}\right]\right) f$$

aller in einem Intervalle (μ) enthaltenen Einheiten bleibt dann und nur dann ungeändert, wenn ihre drei Bestandteile $\left[\frac{s}{p^{\mu-1}}\right], \left[\frac{s}{p^\mu}\right], \left[\frac{s}{p^{\mu+1}}\right]$ entweder alle ungeändert bleiben, oder wenn alle um 1 zunehmen. Nehmen dagegen nur die beiden ersten oder nimmt nur das erste Element um eine Ein-

heit zu, so nimmt jene Anzahl um f ab oder um f zu. Hieraus folgt der Satz:

> Ist p^σ die größte in $s+1$ enthaltene Potenz von p, so nimmt beim Übergang von $\mathfrak{p}^{s+1}$ zu $\mathfrak{p}^{s+2}$ die Anzahl der zum Exponenten p^σ gehörigen Einheiten um f ab, dagegen diejenige der zum Exponenten $p^{\sigma+1}$ gehörigen um f zu. Alle übrigen Anzahlen bleiben ungeändert.

Die Ordnungszahl $1\cdot A_1 + 2A_2 + \cdots$ des Produktes $(P_1 \cdots P_\lambda)$ aller Invarianten vermehrt sich also wirklich beim Übergange von $\mathfrak{p}^{s+1}$ zu $\mathfrak{p}^{s+2}$ genau um f, da σA_σ um $f\sigma$ ab- und $(\sigma+1)A_{\sigma+1}$ um $f(\sigma+1)$ zunimmt, in Übereinstimmung mit (5.) auf S. 221. Ebenso erkennt man, daß sich die Anzahl $\left(s - \left[\frac{s}{p}\right]\right)f$ aller Elemente eines Fundamentalsystemes modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ beim Übergang zu $\mathfrak{p}^{s+2}$ um f Einheiten vermehrt, wenn $s+1$ eine Einheit ist, dagegen ungeändert bleibt, wenn $s+1$ ein Multiplum von p ist.

In dem regulären Falle, daß der Körper $K(\mathfrak{p})$ keine p-ten Einheitswurzeln enthält, daß also Grad und Index von $-p$ nicht beide Multipla von $(p-1)$ sind, werden durch die hier durchgeführten Untersuchungen die Kongruenzklasseninvarianten modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ für jeden Modul vollständig und einfach bestimmt. Hier bilden nämlich die $\lambda+1$ Einheiten $(w, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda)$, deren letzte Elemente η_i durch die Gleichungen (4.) auf S. 217 gegeben sind, stets eine Basis für die Darstellung einer beliebigen Einheit in bezug auf einen beliebigen Modul $\mathfrak{p}^{s+1}$, und die Exponenten

$$p^f - 1, p^{\mu_1}, p^{\mu_2}, \ldots p^{\mu_\lambda},$$

zu denen sie modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehören, sind in jedem Falle die gesuchten Invarianten für die zugehörige Kongruenzklassengruppe.

Anders liegen aber diese Verhältnisse in jenem Ausnahmefalle. Hier trat nämlich an die Stelle des Systemes $(w, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$, das andere $(w, \eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ von $(\lambda+2)$ Elementen, in welchem

$$\eta_0 = 1 + w^{g_0}\pi^{e_0}, \qquad \eta_\lambda = \eta_0^{(p^\nu)} = 1 + \xi\pi^{e_0 p^\nu}$$

ist, während $\eta_1, \ldots \eta_{\lambda-1}$ ihre frühere Bedeutung hatten, und die $\lambda+1$ Einheiten $(\eta_0, \ldots \eta_\lambda)$ sind hier durch die Gleichung (3.) auf S. 217 mit einander verbunden. Ist nun hier $s+1 \leqq r+e$, so fällt diese Relation modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ fort, und in diesem ersten Falle bleiben also die in dieser

Arbeit hergeleiteten Resultate auch in jenem Ausnahmefalle bestehen, weil auch hier jede Einheit η modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ eindeutig in der Form:

$$\eta \equiv w^b \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \dots \eta_{\lambda-1}^{c_\lambda - 1} \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}} \qquad \begin{pmatrix} b=0,1,\dots\ p^f-2 \\ c_i=0,1,\dots\ p^{\mu_i}-1 \end{pmatrix}$$

dargestellt ist. Auch hier sind also die gesuchten Invarianten der Reihe nach:

$$(p^f-1, p^{\mu_0}, p^{\mu_1}, \dots p^{\mu_{\lambda-1}}).$$

Ist aber $s+1 > r+e$, so ist jede Einheit η eindeutig in der Form $w^b \eta_0^{c_0} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ dargestellt, wo zwar $b, c_1, \dots c_\lambda$ je ein vollständiges Restsystem für die Exponenten $p^f-1, p^{\mu_1}, \dots p^{\mu_\lambda}$ durchlaufen, zu denen die Elemente $w, \eta_1, \dots \eta_\lambda$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehören, wo aber der Exponent c_0 nur ein Restsystem modulo p^ν durchlaufen darf, während η_0 im allgemeinen zu einem höheren Exponenten modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehört; und daher bilden in diesem Falle die $\lambda+2$ Elemente $(w, \eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ im allgemeinen noch keine Basis für die Kongruenzklassengruppe modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$. Auf die Frage, welches System in diesem Falle eine solche Basis wird, beabsichtige ich in einer letzten Arbeit einzugehen.

Über die *Newton*sche Näherungsformel.

(Zweite Abhandlung.)

Von Herrn *G. Faber* in München.

Die folgenden Ausführungen ergänzen meine erste Abhandlung über den nämlichen Gegenstand (dieses Journal Bd. 138*)), sind aber auch für sich allein verständlich.

Ich beginne damit, einige Bezeichnungen einzuführen, mit deren Hilfe ich mich im folgenden kürzer ausdrücken kann:

$f(x)$ bedeute stets eine Funktion der reellen Veränderlichen x; $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ seien stetig. Die Strecken der x-Achse, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen ξ von $f(x)$ liegen, mögen mit i_k bezeichnet werden; der Zeiger k kann von Null bis zu einer endlichen Zahl n oder von Null bis ∞ oder auch von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, doch sollen im Endlichen keine Häufungsstellen der ξ liegen; auch werden diese Nullstellen der Einfachheit halber durchweg als einfache vorausgesetzt. Wenn es überhaupt auf der x-Achse Punkte gibt, die nicht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von $f(x)$ liegen, also allemal, wenn $f(x)$ eine größte oder eine kleinste Nullstelle besitzt, sollen jene Punkte den Strahl oder das Strahlenpaar i_∞ erfüllen. Zu $f'(x)$, $f''(x)$ gehören genau so die Intervalle i'_k, i''_k.

*) Ich benutze die Gelegenheit, um einen Vorzeichenfehler in jener Arbeit zu verbessern: in der Klammer auf der rechten Seite der Formel 19 ist $+$ statt $-$ zu schreiben; auch ist die Formel (19.) zwar im allgemeinen genauer als die *Newton*sche, kann aber nicht, wie dort behauptet, durchschnittlich eine zweimalige Anwendung dieser ersetzen.

x_1 sei eine beliebige endliche Zahl in i_k, ξ eine zu x_1 benachbarte Nullstelle von $f(x)$; solche Nachbarstellen gibt es zwei, wenn k endlich ist, eine für $k = \infty$. Man kann x_1 als ersten Näherungswert von ξ auffassen und sich die Aufgabe stellen, eine Zahl x_2 zu finden, die noch in i_k, aber näher an ξ liegt als an x_1, sodann ebenso x_2, x_3 usw. mit

$$\lim x_n = \xi \tag{1.}$$

bei monotoner Annäherung.

Bildet man x_2 aus x_1, x_3 aus x_2 usw. mittels der *Newton*schen Regel, so ist (1.) nur erfüllt, falls x_1 von vornherein in genügender Nachbarschaft von ξ gewählt wurde, und es wird wohl überhaupt kein durch eine einfache Formel ausdrückbares Verfahren geben, das bei *willkürlicher* Wahl der ersten Näherung x_1 konvergent wäre; es kann sich vielmehr nur darum handeln, für gewisse möglichst ausgedehnte Funktionsklassen $f(x)$ solche stets konvergenten Näherungsverfahren zu finden.

Für Polynome $f(x)$ mit nur reellen Nullstellen gibt es zwei Formeln, die das gewünschte leisten, deren eine von *Laguerre*, deren andere von mir herrührt*); jene erfordert bei jedem einzelnen Schritte mehr Rechnung, ist aber rascher konvergent als diese und daher im allgemeinen vorzuziehen. Die folgenden Ausführungen sind ein Beitrag zur Theorie der *Laguerre*schen Regel; ich leite sie zunächst sehr anschaulich ab, indem ich zeige, daß sie auf die *Newton*sche hinausläuft, wenn man diese nicht auf $f(x)$, sondern auf $e^{\alpha x} \cdot f(x)$ anwendet und bei jedem Schritt die Konstante α passend bestimmt; dabei zeigt sich aber, daß es für das Bestehen von (1.) genügt, *α einmal* zu berechnen, und dann mit der gewöhnlichen *Newton*schen Regel fortzufahren; dadurch wird viel Rechenarbeit erspart, da bei jedem Schritt nur $f(x)$ und $f'(x)$ zu berechnen ist, während bei dem *Laguerre*schen Verfahren außerdem jedesmal $f''(x)$ und eine Quadratwurzel auszuwerten ist, so daß eine bestimmt vorgeschriebene Genauigkeit der Annäherung bei meinem abgeänderten Verfahren im allgemeinen rascher erreicht werden dürfte als bei dem ursprünglichen *Laguerre*schen, wiewohl bei diesem durchschnittlich die einzelnen Schritte weiter führen und daher in geringerer Anzahl nötig sind. Während *Laguerre* seine Ausführungen auf Polynome mit nur reellen Nullstellen beschränkt, verlange ich viel

*) Vgl. meine auf der vorigen Seite erwähnte erste Abhandlung.

weniger von den Funktionen $f(x)$, auch beziehen sich meine Bedingungen nicht auf das Verhalten der Funktion $f(x)$ im großen, sondern nur auf ihr Verhalten innerhalb der betreffenden Strecke i_k; ich hebe dies hier ausdrücklich hervor, während ich im folgenden der Kürze halber häufig das Erfülltsein meiner Bedingungen für den ganzen Verlauf von $f(x)$ voraussetze.

Die *Newton*sche Näherungsmethode mit der ersten Näherung x_1 konvergiert sicher nach einer Nullstelle der Funktion $f(x)$, wenn in jedem Intervall i nur eine, einfache Nullstelle von $f'(x)$ und in jedem Intervall i' nur eine, einfache Nullstelle von $f''(x)$ liegt und wenn außerdem x_1 ein Wendepunkt der in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme dargestellten Kurve $y = f(x)$ ist; denn es ist ersichtlich, daß unter diesen Voraussetzungen zwischen x_1 und einem der beiden Endpunkte ξ des zu x_1 gehörigen Intervalls i $f'(x)$ niemals $= 0$ und $f(x)\,f''(x)$ stets < 0 ist. Ich unterwerfe im folgenden nicht nur die Funktion $f(x)$ selbst den soeben angegebenen Bedingungen, sondern auch alle Funktionen $F(x) = e^{ax} \cdot f(x)$ für jedes reelle α, verlange mithin:

a) $F'(x) = e^{ax}(\alpha f(x) + f'(x))$ soll in jedem Intervall i nur eine, einfache Nullstelle haben, und

b) $F''(x) = e^{ax}(\alpha^2 f(x) + 2\alpha f'(x) + f''(x))$ soll in jedem der durch die Nullstellen von $F'(x)$ gebildeten Intervalle i' nur eine, einfache Nullstelle haben.

Die Bedingung a) besagt, daß die Kurve $y = \frac{f(x)}{f'(x)}$ mit jeder Geraden $y = -\frac{1}{\alpha}$ in jedem Intervall i nur einen Schnittpunkt hat, was dann und nur dann möglich ist, wenn $\frac{f(x)}{f'(x)}$ monoton zunimmt, so daß also schließlich a) gleichwertig ist mit

$$(2.) \qquad (f'(x))^2 - f(x)\,f''(x) > 0.$$

So einschränkend auch die Bedingungen a) und b) sein mögen, so gibt es doch ausgedehnte Klassen von Funktionen $f(x)$, die ihnen überhaupt oder wenigstens in einzelnen Intervallen i genügen; sie gelten z. B. ohne Einschränkung für alle Polynome mit nur reellen Nullstellen sowie ebenfalls unter der Voraussetzung nur reeller Nullstellen für die ganzen transzendenten Funktionen, deren Ordnungen $\leqq 1$ sind.

Genügt $f(x)$ den Bedingungen a), b) und ist x_1 keine Nullstelle von $f(x)$, sonst eine ganz willkürliche reelle Zahl, so kann man immer α so bestimmen, daß x_1 Wendepunkt von $e^{\alpha x} f(x)$ und daß somit die Konvergenz des Verfahrens gesichert ist; denn die Gleichung $F''(x) = e^{\alpha x_1}(\alpha^2 f(x_1) + 2\alpha f'(x_1) + f''(x_1)) = 0$ hat stets zwei reelle voneinander verschiedene Wurzeln ungleichen Vorzeichens:

$$\alpha = \frac{-f'(x_1) \pm \sqrt{(f'(x_1))^2 - f(x_1) f''(x_1)}}{f(x_1)}. \tag{3.}$$

Die Anwendung der *Newton*schen Regel auf die mit diesen Werten gebildeten Funktionen $F(x) = e^{\alpha} f(x)$ liefert aus dem ersten Näherungswert x_1 die zweiten

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\alpha f(x_1) + f'(x_1)} = x_1 \mp \frac{f(x_1)}{\sqrt{(f'(x_1))^2 - f(x_1) f''(x_1)}}, \tag{4.}$$

und diese sind bei endlichem Zeiger k des Intervalls i_k von x_1 bessere Näherungen als x_1 für die beiden i_k begrenzenden Nullstellen ξ von $f(x)$, während, falls x_1 in i_∞ angenommen wurde und ξ die x_1 benachbarte und i_∞ begrenzende Nullstelle ist, je nach dem Vorzeichen der Quadratwurzel, der eine der beiden Werte (4.) näher bei ξ als x_1 liegt, der andere näher bei $\pm \infty$. Abgesehen von diesem letzten Falle, in dem die Fortführung des Verfahrens Divergenz nach $\pm \infty$ ergibt, besteht immer die Grenzgleichung

$$\lim_{n=\infty} x_n = \xi,$$

gleichgültig ob man vom zweiten Schritt ab die Formel

$$x_{i+1} = x_i \mp \frac{f(x_i)}{\sqrt{(f'(x_i))^2 - f(x_i) f''(x_i)}} \tag{5.}$$

mit dem nämlichen Vorzeichen der Quadratwurzel wie in (4.) oder die Formel

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\alpha f(x_i) + f'(x_i)} \tag{6.}$$

anwendet, wo α die zu Anfang der Rechnung ein für allemal bestimmte Konstante (3.) ist. Zunächst wäre noch der Einwand möglich, daß die nach der *Laguerre*schen Regel (5.) gebildete monotone Folge $x_1, x_2 \ldots$ nach einer innerhalb i_k gelegenen Zahl η konvergieren könnte, für die $f(\eta) \neq 0$ wäre; aber die Differenz $|x_{i+1} - x_i| = \frac{|f(x_i)|}{\sqrt{(f'(x_i))^2 - f(x_i) f''(x_i)}}$ kann offenbar nur gleichzeitig mit $f(x_i)$ gegen Null konvergieren.

Um die Güte der Annäherung an den Grenzwert zu vergleichen, nehme ich an, daß $x_i - \xi = \varepsilon$ eine sehr kleine Größe erster Ordnung ist, und entwickele $f(x)$ nach Potenzen von ε:

$$(7.) \qquad f(x) = a_0\varepsilon + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^3 + \cdots,$$

dann ergibt eine einfache Rechnung

a) nach Formel (5.): $x_{i+1} - \xi = \left(\frac{a_1^2}{2a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}\right)\varepsilon^3 + \cdots$, also von der dritten Ordnung in ε;

b) nach Formel (6.): $x_{i+1} - \xi = \left(\frac{a_1}{a_0} + \alpha\right)\varepsilon^2 + \cdots$ von der zweiten Ordnung in ε.

Für den Fall, daß $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit lauter reellen Nullstellen ist, verbessert *Laguerre* die Formel (5.) noch durch folgende Überlegung: statt $f(x)$ lege man das Polynom $\varphi(u) = (u-\beta)^n f\left(\frac{1}{u-\beta}\right)$, dessen Nullstellen $\beta + \frac{1}{\xi}$ sind, der Rechnung zugrunde; β ist zunächst irgend eine reelle Zahl. Aus der i-ten Näherung $u_i = \beta + \frac{1}{x_i}$ berechne man die $(i+1)$-te $u_{i+1} = u_i \mp \frac{\varphi(u_i)}{\sqrt{(\varphi'(u_i))^2 - \varphi(u_i)\,\varphi''(u_i)}}$ und daraus $x_{i+1} = \frac{1}{u_{i+1} - \beta}$ als Funktion von x_i und β; schließlich bestimme man β so, daß $|x_{i+1} - x_i|$ möglichst groß wird. Die Rechnung ist einfach und leicht durchzuführen; *Laguerre* vermeidet sie fast völlig durch Hinzunahme projektiver und invariantentheoretischer Betrachtungen; es ergibt sich:

$$(8.) \qquad x_{i+1} = x_i + \frac{n f(x_i)}{-f'(x_i) \mp \sqrt{(n-1)^2 (f'(x_i))^2 - n(n-1) f(x_i) f''(x_i)}},$$

und wenn man wieder nach Potenzen von ε entwickelt:

$$(9.) \qquad x_{i+1} - \xi = \left(\frac{(n-2)\,a_1^2}{(2n-2)\,a_0^2} - \frac{a_2}{a_0}\right)\varepsilon^3 + \cdots.$$

Der Vorzug der Formel (8.) vor (5.) ist mithin nicht erheblich und wird um so geringer, je größer n ist.

Über das *Cauchy*sche Integral.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

Die *Taylor*sche Reihe und das *Cauchy*sche Integral sind Darstellungsformen für die Funktion der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$. Sie gelten in der Regel nur für einen beschränkten Bereich. Man kann, indem man von solchen Formen ausgeht, zu einer allgemeinen Definition der analytischen Funktion von x gelangen. Von anderer Art ist die *Riemann*sche Begriffsbestimmung, die sich auf eine Eigenschaft der Funktion gründet.

„Eine veränderliche Größe w heißt eine Funktion einer andern komplexen Größe z, wenn sie mit ihr sich so ändert, daß der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werte des Differentials dz ist“ (*Riemann*, Grundlagen etc., Schluß von § 1).

Es ist $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$, $dz = dx + i dy$. Soll der Quotient von dz, d. h. von $\frac{dx}{dy}$ unabhängig sein, so muß $\frac{\partial w}{\partial y}$ gleich $i \frac{\partial w}{\partial x}$ sein. *Cauchy* nennt eine Funktion, die dieser Gleichung genügt, monogen.

Cauchy ist *Riemann* vorangegangen, indem er die Integralsätze des *Green*schen Versuchs, die sich auf den Raum beziehen, für die Ebene zur Geltung brachte, wo die harmonische Funktion die Abszisse einer Funktion von $x + iy$ ist. Ferner beruht *Riemann*s Beweis, daß die Größe w mit dem von dz unabhängigen Differentialquotienten eine im vollen Sinn reguläre Funktion von z ist, auf der Darstellung von w durch das *Cauchy*sche Integral. Indes habe ich nicht den Eindruck, daß *Cauchy* eine neue, der formalen entgegengesetzte Definition von $F(z)$ geben wollte; *Riemann*s Dissertation will das entschieden und betont den Gegensatz.

Wenn man von einer der beiden Darstellungsformen ausgeht, so ist sofort vieles bewiesen, z. B. die Existenz der Differentialquotienten aller Ordnungen. Anders verhält es sich bei *Riemanns* Definition, falls man nichts anderes voraussetzt, als was in ihr direkt enthalten ist. Da sind Vorbereitungen nötig, und der eigentliche Kalkul kann erst dann beginnen, wenn auf Grund der Begriffsbestimmung eine wirkliche analytische Darstellung gewonnen ist. Wenigstens geht *Riemann* so vor, und es scheint nicht, daß eine andere Möglichkeit vorhanden ist. Aber *Riemann* nimmt etwas hinzu, was genau genommen in seiner Definition nicht unmittelbar enthalten ist: daß die Größe $w' = \frac{dw}{dz}$ sich wie w selbst *stetig* mit der Veränderlichen z ändert; macht man über die Werte von w' im Integrationsgebiet gar keine Voraussetzung, so steht das Doppelintegral $\iint w'\,dx\,dy$, das *Riemann* verwendet, in der Luft. *Goursat* hat, in verhältnismäßig neuerer Zeit, einen andern Weg gefunden, die Gleichung des *Cauchy*schen Integrals zu beweisen, und *Moore*, dessen Idee ich, mit einer kleinen Abänderung, hier darstellen will, hat den Weg vereinfacht. Bei diesen Beweisen kommt es gar nicht darauf an, ob man w' stetig annimmt oder nicht. Daraus folgt, daß die *Riemann*sche Begriffsbestimmung der Funktion einer komplexen Größe z ganz ohne Zusatz bleiben kann.

Dem, der unbefangen an die Untersuchungen von *Goursat* und *Moore**) herantritt, fällt auf, daß sich die *Goursat*sche allgemeine Frage nach den Voraussetzungen der *Cauchy*schen Formel abtrennen läßt, denn man braucht sie nur für den Spezialfall des Rechtecks. Auch *Riemanns* Beweis kann vereinfacht werden. Dort treten problematische Punkte im Bereich der Veränderlichen auf, die sich zuletzt als völlig reguläre erweisen. Wir behalten diese bei, stellen aber für das Verhalten der Funktion in ihrer Nähe eine andere Bedingung.

Die unabhängige Variable bezeichne ich nicht mit z, sondern mit x. — Eine Größe w, die von der Lage des Punktes x abhängt, also eine reelle oder imaginäre Funktion der Koordinaten, heißt stetig im Punkte x_0,

---

*) *E. Goursat:* Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après *Cauchy*. *Moore:* A simple proof of the fundamental *Cauchy-Goursat* theorem. Transactions of the Am. Math. Soc. Vol. I (1900).

wenn sie dort einen endlichen Wert w_0 hat und wenn sich bei beliebigem δ ein Umkreis von x_0 angeben läßt, in dem $w - w_0$ kleiner als δ bleibt. Sie heißt stetig in einem Gebiete G, wenn sie in jedem Punkte stetig ist, der innerhalb G liegt. Sind zwei Größen w und w_1 stetig im Gebiete G, so gilt von ihrem Produkt $w w_1$ dasselbe; ich nenne w durch w_1 teilbar, wenn es eine dritte Größe W gibt, die der Gleichung $w = w_1 W$ genügt und ebenso wie w und w_1 im ganzen Gebiete stetig ist.

R sei ein endlicher von einer einzigen Randlinie begrenzter Teil von G, der ganz im Innern liegt. Das Integral $I = \int w\, dx$, im positiven Sinn erstreckt über den Rand von R, nennen wir, solange wir bei einer und derselben stetigen Funktion w bleiben, kurz: das Randintegral von R. Zerlegt man R durch Zwischenlinien in n Teile, so ist I gleich der Summe der Randintegrale aller Teile von R und $\frac{1}{n} I$ das arithmetische Mittel. Das größte unter den Randintegralen der Teile von R ist daher sicher nicht kleiner als $\frac{1}{n} I$.

Wir geben dem Gebiet R speziell die Form eines Rechtecks; wir setzen außerdem voraus, daß I einen von 0 verschiedenen Wert hat. Durch zwei gerade Linien, die die Mitten der Gegenseiten verbinden, zerlegen wir das Rechteck R in vier kleinere und bezeichnen mit R_1 dasjenige der vier, das das größte Randintegral hat; sollten mehrere der vier Integrale denselben absoluten Wert besitzen, so hat man eine Auswahl zu treffen, indem man den vier Teilen eine bestimmte Reihenfolge gibt. Das Rechteck R_1 zerlegen wir genau in derselben Weise in vier kleinere und wählen wieder denjenigen Teil R_2 aus, dessen Randintegral das größte ist, usf. Wir erhalten so eine unendliche Kette von Rechtecken R, R_1, R_2 etc. in inf., von denen jedes der vierte Teil des vorangehenden ist. Es gibt einen Punkt, der allen gemeinsam ist. Wir nennen ihn x_0, den zugehörigen Wert von $w w_0$, und behaupten, daß $w - w_0$ nicht durch $x - x_0$ teilbar ist (*Moore*scher Schluß).

Es sei u der Umfang von R, u_n der von R_n. Dann ist offenbar u_n gleich $\frac{u}{2^n}$. Wir stellen ferner eine positive Zahl g auf, kleiner als der absolute Wert von I. Das Randintegral von R_n setzen wir gleich I_n.

I ist größer als g, I_1 nicht kleiner als $\frac{1}{4} I$, also größer als $\frac{1}{4} g = g_1$; allgemein I_n größer als $g_n = \frac{g}{4^n}$. Bestimmt man eine Größe Δ durch die Gleichung $g = \frac{1}{2} u^2 \Delta$, so ist auch $g_n = \frac{1}{2} u_n^2 \Delta$. Es ist also I_n größer als $g_n = \frac{1}{2} u_n^2 \Delta$.

Wäre $w - w_0$ durch $x - x_0$ teilbar, so würde eine im ganzen Gebiete stetige Funktion W existieren, die der Gleichung $w - w_0 = (x - x_0) W$ genügt, und wenn wir ihren Wert im Punkte x_0 mit W_0 bezeichnen, so ließe sich ein Kreis um x_0 ziehen, in dessen Innern durchweg $W - W_0$ kleiner als Δ wäre. Die Zahl n nehmen wir so groß an, daß $\frac{1}{2} u_n$ kleiner ist als der Radius. Dann liegt R_n ganz im Innern des Kreises, denn die gegenseitige Entfernung zweier Punkte von R_n ist kleiner als der halbe Umfang. Das Integral $I_n' = \int (x - x_0)(W - W_0) dx$ über den Umfang von R_n ist kleiner als g_n; denn $x - x_0$ ist kleiner als $\frac{1}{2} u_n$, $W - W_0$ kleiner als Δ, und die Länge der Integrationslinie gleich u_n. Es wäre daher I_n' von I_n, $I_n' - I_n$ von 0 verschieden. Das ist unmöglich; denn da $(x - x_0) W$ gleich $w - w_0$ ist, so hat das Integral $I_n' - I_n$ die Form $\int (\alpha + \beta x) dx$, wo α, β Konstanten sind; ein solches Integral, über eine geschlossene Linie, ist 0. — Damit ist bewiesen: Wenn I von 0 verschieden ist, so gibt es in G mindestens einen Punkt x_0 von der Art, daß die in x_0 verschwindende Funktion $w - w_0$ nicht durch $x - x_0$ teilbar ist.

Jetzt machen wir im Gegensatz hierzu die Voraussetzung, daß $w - w_0$, wie auch der Punkt x_0 gewählt sein mag, immer durch $x - x_0$ teilbar sei. Dann muß I gleich 0 sein, sonst müßte im Innern von G mindestens ein Ausnahmepunkt existieren. Aus der jetzigen Voraussetzung, die identisch ist mit der *Riemann*schen des von dx unabhängigen Differentialquotienten $\frac{dw}{dx}$, folgt also: das Integral $I = \int w dx$, erstreckt über den Rand irgend eines im Innern von G liegenden Rechtecks, ist gleich 0.

Übrigens bleibt das Resultat, die Gleichung $I = 0$, auch dann bestehen, wenn wir einzelne Punkte zulassen, für die die Teilbarkeit von $w - w_0$ durch $x - x_0$ fraglich ist. Wir stellen die Voraussetzungen direkt so:

Im Innern von G sei eine endliche Anzahl von Stellen a, a' etc. gegeben, für die wir nur die Stetigkeit von w annehmen. Für jeden

andern Punkt x_0, der im Innern von G liegt, setzen wir außer der Stetigkeit voraus, daß die in x_0 verschwindende Funktion $w - w_0$ durch $x - x_0$ teilbar sei*).

Wenn die Punkte (a) alle außerhalb R liegen, ist die Gleichung $I = 0$ selbstverständlich; man braucht sich nur ein Teilgebiet von G vorzustellen, das das Rechteck R, aber keinen der Punkte (a) umschließt.

Liegt *einer* der ausgenommenen Punkte im Innern oder auf dem Rande von R, dann stellen wir folgende Überlegung an. Der Punkt sei $x = a$, und b der zugehörige Wert von w. Wir konstruieren ein beliebig kleines Teilgebiet R' von R, das den Punkt a enthält, wieder in der Form eines Rechtecks, dessen Seiten denen von R gleichgerichtet sind. Das Randintegral von R' sei I'. Indem wir zwei Gegenseiten von R' verlängern, teilen wir R in eine Anzahl von Rechtecken, deren eines R' ist. Das Randintegral von R ist gleich der Summe der Randintegrale aller Teile. Daraus folgt: $I = I'$; denn die Randintegrale der von R' verschiedenen Teile sind 0, da der Punkt a außerhalb des Integrationsweges liegt.

Das Integral I' können wir so schreiben: $I' = \int (w-b)\,dx$. Dann ist der Integrand beliebig klein, ebenso wie die Länge des Integrationsweges. Demnach ist I kleiner als jede noch so kleine Zahl, d. h. gleich 0.

Nun können wir bald sagen: das über den Rand von R erstreckte Integral $\int w\,dx$ ist auch dann gleich 0, wenn beliebig viele der ausgenommenen Punkte (a) auf die Figur fallen.

x_0 und x_1 seien zwei von den (a) verschiedene Punkte im Innern von G, w_0, w_1 die zugehörigen Werte von w, und W, V die beiden im ganzen Gebiete stetigen Funktionen, die den Gleichungen $w - w_0 = (x - x_0)\,W$, $w - w_1 = (x - x_1)\,V$ genügen. Den Wert von W im Punkte x_1 bezeichnen wir mit W_1, so daß $w_1 - w_0 = (x_1 - x_0)\,W_1$ ist. Aus den drei Gleichungen folgt:

$$(x_0 - x_1)(W - W_1) = (x - x_1)(W - V).$$

Da $x_0 - x_1$ konstanter Faktor ist, $W - V$ im ganzen Gebiete stetig, so ist $W - W_1$ durch $x - x_1$ teilbar. Dies gilt für jeden Punkt x_1 im Innern von G_0, der von x_0 und den Punkten (a) verschieden ist, W hat demnach

*) *Riemann* setzt in dem problematischen Punkte $x = a$ auch die Stetigkeit von w nicht voraus, sondern nur, daß $(x - a)w$ mit $x - a$ unendlich klein wird.

genau dieselben Eigenschaften, die für w vorausgesetzt waren, nur daß zu den Punkten (a) noch x_0 hinzutritt. Es ist also auch das Integral $\int W dx$ über den Rand von R gleich 0.

Wir nehmen x_0 im Innern von R an. Dann folgt aus der Gleichung

$$\int \frac{w - w_0}{x - x_0} dx = 0$$

die *Cauchy*sche Formel:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{w dx}{x - x_0} = w_0.$$

w_0 ist der Wert von w in x_0; x_0 ist von den Punkten (a) verschieden. Es würde sich sofort zeigen lassen, daß die Gleichung auch bestehen bleibt, wenn x_0 mit einem der innerhalb R liegenden Ausnahmepunkte zusammenfällt. Aber da x_0 variabel ist, so gibt die Gleichung eine Darstellungsform der Funktion w, und wir wollen zunächst diese Form erweitern.

Statt x_0 schreiben wir y. Statt des Randes von R nehmen wir eine beliebige offene oder geschlossene Integrationslinie L. w braucht nur für die Linie selbst gegeben zu sein, als eine längs L stetige Größe. $\frac{1}{x-y}$ ersetzen wir durch $R(y-x)$, indem wir unter $R(z)$ irgend eine rationale Funktion von z verstehen, die nur für $z = 0$ unendlich wird, also eine ganze von $\frac{1}{z}$. Das Integral, das wir so erhalten:

$$\int w R(y - x) dx,$$

hat eine Bedeutung für jeden Punkt y, der nicht auf der Linie L liegt; wir beschränken y auf ein Gebiet H, das nicht von L durchschnitten wird, und bezeichnen das Integral mit $F(y)$. Ferner seien $F'(y), F''(y)$ usf. diejenigen Funktionen, die wir bekommen, wenn wir die rationale Funktion $R(z)$ durch ihre Ableitungen $R'(z), R''(z)$ usf. ersetzen. Außerdem bilden wir die Polynome $R(z, z'), S(z, z')$, ganze Funktionen von $\frac{1}{z}$ und $\frac{1}{z'}$, die den Gleichungen:

$$R(z) - R(z') = (z - z') R(z, z'),$$
$$R(z, z') - R'(z') = (z - z') S(z, z')$$

genügen, und wir setzen, indem wir unter y, y' Punkte im Innern von H verstehen:

$$\int w R(y - x, y' - x) dx = F(y, y'),$$
$$\int w S(y - x, y' - x) dx = G(y, y').$$

Für den Augenblick nehmen wir y, y' nicht nur innerhalb H an, sondern im Innern eines Teilgebiets H' von H, das von der Linie L auch nicht berührt wird; sein kürzester Abstand von dieser Linie sei ε. Es ist möglich, eine positive Zahl M_1 so groß zu wählen, daß $R(z, z')$ und $S(z, z')$ kleiner als M_1 bleiben für alle z, z', die absolut genommen größer als ε sind. Wenn y, y' innerhalb H' liegen und x auf der Linie L, so sind $y - x$ und $y' - x$ größer als ε, daher sind $F(y, y')$ und $G(y, y')$ kleiner als

$$M_1 \int |w dx| .$$

Diesen konstanten Wert bezeichnen wir mit M, unter δ verstehen wir eine beliebig kleine positive Zahl. Dann folgt, daß

$$F(y) - F(y') \text{ und } \frac{F(y) - F(y')}{y - y'} - F'(y')$$

kleiner als δ sind für je zwei verschiedene Punkte y, y' innerhalb H', deren gegenseitiger Abstand kleiner als $\frac{\delta}{M}$ ist. Das heißt nichts anderes als: Die Funktion $F(y)$ ist stetig und $F'(y)$ ihr Differentialquotient. Was von $F(y)$ gilt, gilt auch von $F'(y)$. Daher ist auch $F'(y)$ stetig, und $F''(y)$ der Differentialquotient von $F'(y)$; usf.

y, y' sollten innerhalb H' liegen. Da man die Grenzen von H' denen von H beliebig nahe annehmen kann, so besteht das Resultat für das Innere von H.

Auch die Darstellung von $F(y)$ durch die *Taylor*sche Reihe ergibt sich unmittelbar. Wir verstehen unter y' einen festen Punkt im Innern von H und beschränken y auf die Fläche eines Kreises um y', der bis zur Linie L reicht. Die Entwicklung der rationalen Funktion $R(y - x)$ nach Potenzen von $y - y'$:

$$R(y - x) = R(y' - x) + R'(y' - x)(y - y') + \text{ etc.}$$

ergibt sich schon aus dem binomischen Satz; sie ist konvergent, wenn $y - y'$ kleiner als $y' - x$ ist; wenn also x einen Punkt der Integrationslinie bedeutet, so konvergiert sie für die Punkte y im Innern des gezeichneten Kreises. — Daraus folgt die Entwicklung

$$F(y) = F(y') + F'(y')(y - y') + \text{ etc.}$$

und ihre Konvergenz in demselben Kreise.

Jetzt dürfen wir sagen: das Integral $F(y)$ stellt innerhalb jedes

Gebiets, das von der Linie L nicht durchschnitten wird, eine reguläre Funktion der komplexen Größe y dar.

Kehren wir zum Rechteck R und zu der für diese Figur bewiesenen Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{w\,dx}{x-x_0}=w_0$$

zurück. w_0 ist eine innerhalb G stetige Funktion von x_0, der Ausdruck auf der linken Seite eine nicht nur stetige, sondern auch reguläre Funktion von x_0 im Innern des Rechtecks R. Zwei stetige Größen, die im allgemeinen übereinstimmen, können nicht in einzelnen Punkten verschiedene Werte haben. Die Gleichung, die aufgestellt worden war für die von den (a) verschiedenen Punkte x_0 im Innern von R, gilt daher auch für die Punkte (a), soweit sie innerhalb R liegen. Da ferner das Rechteck beweglich ist und in alle Schlupfwinkel des Gebiets eindringen kann, so ist w eine innerhalb G durchweg reguläre Funktion von x.

Riemann setzt für die Ausnahmepunkte die Stetigkeit von w nicht voraus; die Funktion ist für diese Punkte überhaupt nicht definiert, es wird nur angenommen, daß, wenn a einer der Punkte ist, das Produkt $(x-a)\,w$ gleichzeitig mit $x-a$ unendlich klein wird. Die Aufgabe, zu beweisen, daß auch unter den *Riemann*schen Bedingungen die volle Regularität von w im Gebiete besteht, ist also eine andere, aber sie läßt sich auf die gelöste zurückführen. Nehmen wir *Riemann*s Voraussetzung an. Da die Anzahl der Punkte a eine endliche ist, so läßt sich in der Form $\Pi(x-a)$ eine ganze Funktion $g(x)$ bilden, die an allen diesen Stellen verschwindet. Dann wird das Produkt $g(x)\cdot w=W$ unendlich klein bei der Annäherung von x an irgend einen der problematischen Punkte; wenn wir der Größe W in diesen Punkten den Wert 0 beilegen, so ist sie damit als eine im ganzen Gebiete stetige Größe definiert. x_0 sei irgend ein von den (a) verschiedener Punkt im Innern von G, w_0 der zugehörige Wert von w, W_0 der von W. Dann ist $W-W_0$ durch $x-x_0$ teilbar, denn die Differenz läßt sich aus $(g(x)-g(x_0))\,w$ und $g(x_0)(w-w_0)$ zusammensetzen. Es folgt demnach aus dem bewiesenen Satze, daß W eine im Innern von G durchaus reguläre Funktion von x ist. Da sie in den Punkten a verschwindet, so ist sie durch $g(x)$ teilbar. Damit wird auch w einer im ganzen Gebiete regulären Funktion von x gleichgesetzt und bekommt in

jedem der Punkte, die den Voraussetzungen nach problematisch sind, einen endlichen Wert. Das Resultat ist dies (vergl. *Riemann*, Diss., § 12):

Wenn w in jedem Punkte x_0 innerhalb G einen endlichen Wert w_0 hat und die Differenz $w - w_0$ immer durch $x - x_0$ teilbar ist, so ist w eine im Innern von G reguläre Funktion von x. Sie ist es auch, wenn wir von der Voraussetzung einzelne Ausnahmen zulassen, wofern nur für die ausgenommenen Punkte entweder die Stetigkeit von w gefordert oder die *Riemann*sche Bedingung gestellt wird. —

Jetzt machen wir einfach die übliche Voraussetzung, daß w eine im Innern von G eindeutig definierte reguläre Funktion von x ist. Das Gebiet G nehmen wir in der Form der durchlöcherten Scheibe an (des Diskus mit mehreren Löchern, *Picard*), die außer der umschließenden L_0 noch beliebig viele innere Randlinien $L_1, L_2 \dots L_n$ hat. Im Innern von G liege der Punkt y. Über das Verhalten der Funktion auf den Rändern von G machen wir gar keine Voraussetzung. Statt G selbst betrachten wir ein Teilgebiet G', das den Punkt y ebenfalls in seinem Innern enthält und dessen Grenzen $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_n$ die von G nicht berühren. Es soll aber zwischen jeder Linie L_0 und der entsprechenden λ_0 nur ein beliebig schmaler Streifen vorhanden sein. Wir bilden die ebenfalls im ganzen Gebiete G reguläre Funktion W, die der Gleichung $w(x) - w(y) = (x - y) W$ genügt. Auf diese Funktion W nebst ihren Ableitungen nach den Koordinaten ξ und η von x und auf das Gebiet G' läßt sich ohne Bedenken die Methode von *Cauchy*, *Riemann* und *Green* anwenden. Wir bilden $W' = \frac{dW}{dx}$ und das Integral über G': $\iint W' d\xi\, d\eta = D$. Da $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ gleich W', $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ gleich iW' ist, so ist $D = \iint \frac{\partial W}{\partial \xi} d\xi\, d\eta$, $iD = \iint \frac{\partial W}{\partial \eta} d\xi\, d\eta$.

Durch Ausführung einer Integration ergibt sich:

$$D = \int W d\eta, \quad iD = -\int W d\xi$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$\int W dx = 0.$$

Dies sind Integrale über die volle Begrenzung von G' — ein Begriff, den *Green* bei seiner räumlichen Betrachtung immer und immer wieder betont —; sie erstrecken sich über alle $n + 1$ Randlinien λ_ν, durchweg in

dem Sinn, daß das Innere von G' zur Linken bleibt. Die Gleichung $\int W\,dx = 0$ liefert die *Cauchy*sche Formel:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)}{x-y}\,dx = w(y).$$

Der Ausdruck links stellt die Summe der Integrale über die Randlinien von G' dar. Bezeichnen wir die einzelnen mit $w_0(y), w_1(y) \ldots w_n(y)$, so haben wir die Gleichung:

$$w(y) = w_0(y) + w_1(y) + \cdots + w_n(y).$$

Das Integral $w_\nu(y)$ erstreckt sich nicht über L_ν, sondern über λ_ν. Aber sein Wert bleibt fest, wenn man λ_ν ändert. Wir denken uns zwischen L_ν und λ_ν eine dritte Linie μ_ν gezogen, die den schmalen Streifen in zwei noch schmälere zerlegt. Wendet man auf das Gebiet zwischen λ_ν und μ_ν die Gleichung $\int Q\,dx = 0$ an, in der Q die in diesem Gebiet reguläre Funktion $\frac{w(x)}{x-y}$ bedeutet, so ergibt sich, daß das Integral über λ_ν gleich dem über μ_ν ist. Da es hiernach auf die Linie λ_ν nicht ankommt, so nenne ich $w_\nu(y)$: das Integral *um* die Linie L_ν. Die ganze Summe ist dann das Integral *um* die Begrenzung von G. Das Integral um die Begrenzung von G:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)\,dx}{x-y}$$

stellt demnach, für das Innere von G, $w(y)$ dar. Diese Fassung gebe ich dem *Cauchy*schen Integralsatz.

Es ist klar, daß durch den Integralausdruck $w_\nu(y)$ eine reguläre Funktion von y gegeben wird, nicht nur im Gebiete G, sondern in dem ganzen Teil der Ebene, der das Gebiet G enthält, aber von L_ν allein begrenzt ist. Außerdem verschwindet, wie man leicht sieht, wenn L_ν eine innere Randlinie ist, $w_\nu(y)$ im Unendlichen. Wenn man das Resultat, was notwendig ist, von der *Cauchy*schen Formel loslöst, so erhält man einen allgemeinen funktionentheoretischen Lehrsatz:

Jede in der durchlöcherten Scheibe eindeutige reguläre Funktion von x zerfällt in eine Summe von so vielen Einzelfunktionen, als Randlinien vorhanden sind. Die zur Randlinie L_ν gehörige Funktion ist regulär in dem von L_ν allein begrenzten Gebiete, von dem G ein Teil ist, und sie verschwindet im Unendlichen, wenn L_ν eine innere Randlinie ist.

Daß es nur eine solche Zerlegung gibt, ist leicht zu beweisen. Angenommen, es gebe zwei; dann entstände durch Subtraktion eine Gleichung:

$$v_0(y) + v_1(y) + \cdots + v_n(y) = 0,$$

gültig für das Gebiet G. $v_0(y)$ aber wäre regulär innerhalb L_0, $v_1(y)$, außerhalb L_1, usf. Es ließe sich eine Funktion $\varphi(y)$ definieren, die innerhalb L_0 mit $v_0(y)$ und außerhalb $L_1, L_2 \ldots L_n$ mit der negativen Summe der übrigen Funktionen identisch wäre. Diese wäre in der ganzen Ebene regulär und sie verschwände im Unendlichen. Eine solche Funktion existiert nicht; folglich ist $\varphi(y)$ und damit $v_0(y)$ identisch 0. Dasselbe ergibt sich für die folgenden Größen: $v_1(y), v_2(y), \ldots v_n(y)$.

Zur Systematik der additiven Zahlentheorie.

I.

Von Herrn *Lothar von Schrutka* in Brünn.

1. Einleitung.

In der neueren Entwicklung der additiven Zahlentheorie bildet wohl unstreitig *Vahlens* in diesem Journal, Band 112 (1893), S. 1—36, erschienene Doktordissertation*) den markantesten Punkt. Indem ich versuchte, *Vahlens* kühnen Gedankengängen zu folgen, reizte es mich, das Typische seiner eigenartigen Schlüsse möglichst scharf herauszuarbeiten, um die Tragweite seiner Methoden nach Möglichkeit zu erschöpfen und so in der von ihm angebahnten systematischen Darstellung des bis dahin ohne rechten Plan behandelten Gebietes einen Schritt vorwärts zu tun.

Indem ich mir die Veröffentlichung einer ausführlichen Darstellung, auf die ich auch bezüglich genauerer Literaturangaben verweise, vorbehalte, will ich hier meine neuen Begriffsbildungen und Bezeichnungen, soweit ich sie bisher genügend durchgearbeitet habe, ganz knapp vorführen, die Beweise oft nur andeuten und nur einige Anwendungen auf *Vahlens*che Resultate vorbringen, an denen sich der Gewinn an Übersicht ermessen läßt. Eine Fortsetzung hoffe ich nach einiger Zeit folgen lassen zu können.

2. Komposition nach Summen.

Sind $f(s)$ und $g(s)$ zwei zahlentheoretische Funktionen, so kann man nach einer bestimmten Vorschrift, die *Komposition* oder genauer *Komposition nach Summen* genannt werden möge, daraus eine neue zahlen-

*) Im folgenden kurz mit *Vahlens* Namen zitiert.

theoretische Funktion ableiten. Diese Vorschrift kann am einfachsten, wenn auch nicht am natürlichsten mit Hilfe der erzeugenden Potenzreihen von f, g und h beschrieben werden; sind diese Potenzreihen

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_0^\infty f(s)\,x^s, \quad \mathfrak{G}(x) = \sum_0^\infty g(s)\,x^s, \quad \mathfrak{H}(x) = \sum_0^\infty h(s)\,x^s,$$

so soll nämlich

$$\mathfrak{H}(x) = \mathfrak{F}(x)\cdot\mathfrak{G}(x)$$

sein. Es ist daher

$$h(s) = \sum_0^s f(i)\,g(s-i).$$

Als Zeichen der Komposition diene $\square$, sodaß also kurz

$$h = f \square g$$

gesetzt werden kann.

3. Sätze über die Komposition nach Summen.

Die Rechenregeln bei der Komposition ergeben sich ohne weiters aus den Rechenregeln für die Multiplikation von Potenzreihen. Es sollen hier die Regeln, die genau so lauten, wie für die Multiplikation der Funktionen, der Kürze halber übergangen und nur folgendes angeführt werden: Wird

$$\varepsilon(0) = 1, \qquad \varepsilon(s) = 0 \qquad (s > 0)$$

gesetzt, so ist

$$f \square \varepsilon = f.$$

Es werde

$$f \square f = f^{[2]}, \qquad f^{[2]} \square f = f^{[3]}, \ldots$$

gesetzt. Ist ferner

$$f \square g = \varepsilon,$$

so werde

$$g = f^{[-1]}$$

gesetzt.

4. Anwendungen.

Definiert man, wie *Vahlen*:

$$\varrho(s) = N(s = \Sigma k_i u_i), \quad \tau(s) = N(s = \Sigma u_i), \quad \sigma(s) = N(s = \Sigma k_i a_i),$$

wo u_i ungerade, a_i beliebige von einander verschiedene Summanden und das von *Jacobi**) herrührende Zeichen $N(s = \cdots)$ die Anzahl der Zer-

*) Dieses Journal 12, S. 167, siehe auch *Bachmann*, Niedere Zahlentheorie II, S. 102.

legungen der angegebenen Form bedeutet, setzt man ferner für jede Funktion $f(s)$

$$(-1)^s f(s) = \dot{f}(s)$$

und endlich

$$\pi\left(\frac{3k^2-k}{2}\right) = (-1)^k, \qquad (k \gtrless 0)$$

dagegen

$$\pi(s) = 0,$$

wenn s keine Fünfeckszahl $\varpi_k = \frac{3k^2-k}{2}$ ist, so kann man *Vahlens* Formeln (25.)

$$\sum_k (-1)^k \sigma(s - \varpi_k) = 0$$

und (28.)

$$\sum_k (-1)^k \tau(k)\, \varrho(s-k) = 0$$

kurz so schreiben:

$$(*) \qquad \pi \square \sigma = \varepsilon, \ \dot{\tau} \square \varrho = \varepsilon;$$

es sind also π und σ, $\dot{\tau}$ und ϱ reziprok (in bezug auf die Komposition).

5. Anzahlarithmetische Bedeutung der Komposition.

Haben f und g die Bedeutung von Anzahlen von Zerlegungen des Arguments nach bestimmter Vorschrift, etwa (nach *Jacobis* und *Vahlens* Schreibweise)

$$f(s) = N(s = \mathfrak{A}), \ g(s) = N(s = \mathfrak{B})$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ kurze Symbole für Ausdrücke sind, die nach ganz bestimmter Vorschrift gebildet sind, allenfalls noch mit einer beliebigen Zählungsvorschrift, so hat auch $f \square g = h$ eine solche Bedeutung, nämlich

$$h(s) = N(s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}).$$

6. Anwendungen.

Danach kann also der Inhalt von *Vahlens* Formel (10.)

$$N\left(s = \sum_1^\lambda a_i + \Sigma k_i a_i';\ (-1)^\lambda\right) = 0,$$

worin $(-1)^\lambda$ bedeutet, daß jede Zerlegung positiv oder negativ zu zählen ist, je nachdem die Anzahl der a_i gerade oder ungerade ist, kurz so ausgedrückt werden

$$(*) \qquad N\Big(s = \sum_1^{\lambda} a_i;\ (-1)^{\lambda}\Big) = \sigma^{[-1]}(s).$$

Auf Seite 13 und 14 der *Vahlen*schen Abhandlung wird aus der Formel (44.)

$$(**) \quad N\Big(s = \sum_1^{\lambda}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i + \sum_1^{\nu} c_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big) = N\Big(s = \frac{h^2-h}{2};\ (-1)^{h}\Big), \qquad (\lambda-\mu=h)$$

wo der Akzent am Summenzeichen anzeigt, daß einer der Summanden a_i gleich Null sein darf, auf die Gleichung (47.)

$$N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big) = \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big)$$

geschlossen. Es geschieht dies, indem die Anzahl

$$N\Big(s = \sum_1^{\lambda}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i + \sum_1^{\nu} c_i + \Sigma k_i d_i;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}\Big) \qquad (\lambda-\mu=h \geqq 0)$$

einerseits nach (44.) auf

$$(-1)^h \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big),$$

andrerseits nach der oben zitierten Formel auf

$$(-1)^h N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big)$$

reduziert wird. Der Fall $h = 0$ ist bei *Vahlen* vorausgenommen.

Nach den hier eingeführten Begriffen und Bezeichnungen ist aber die linke Seite von (**) das Resultat die Komposition von

$$N\Big(s = \sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big)$$

und

$$N\Big(s = \sum_1^{\nu} c_i;\ (-1)^{\nu}\Big) = \sigma^{[-1]}(s);$$

es ist also nur diese Funktion $\sigma^{[-1]}$ als σ auf die andere Seite geschafft worden.

7. Neuer Beweis des *Vahlen*schen engeren Pentagonalzahlensatzes.

Es sei hier eingeschaltet, daß man den etwas umständlichen *Vahlen*schen Beweis seines engeren Pentagonalzahlensatzes, der mit seiner eben zitierten Formel (44.) in engstem Zusammenhang steht, durch einen einfacheren ersetzen kann, wenn man zunächst die ebenfalls vorhin erwähnte Gleichung (47.)

$$(*) \qquad N\Big(s = \sum_1^{\lambda}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i\Big) = \sigma\Big(s - \frac{h^2-h}{2}\Big)$$

beweist.

Dieser Beweis läßt sich am bequemsten mit Hilfe der von *J. J. Sylvester**) eingeführten „*graphs*“ (Punktdiagramme) darstellen. Eine Zerlegung wird hierbei durch Punkte, die den Summanden entsprechend in Zeilen geordnet sind, dargestellt, so z. B. die Zerlegung

$$22 = 5 + 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 1.5 + 2.4 + 0.3 + 4.2 + 1.1$$

durch:

. . . . .
. . . .
. . . .
. .
. .
. .
. .
.

Um den Beweis zu führen, werde nun eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Zerlegungen

$$s = \sum_{1}^{\mu+h}{}' a_i + \sum_{1}^{\mu} b_i$$

und den Zerlegungen

$$s - \frac{h^2-h}{2} = \Sigma k_i c_i \text{ oder}$$

$$s = \frac{h^2-h}{2} + \Sigma k_i c_i,$$

deren Anzahl ja

$$\sigma\left(s - \frac{h^2-h}{2}\right)$$

ist, hergestellt, und zwar möge dies für $s - \frac{h^2-h}{2} = 22$ an der eben als Beispiel angeführten Zerlegung, und für den Fall $h = 3$ gezeigt werden. Man ordne

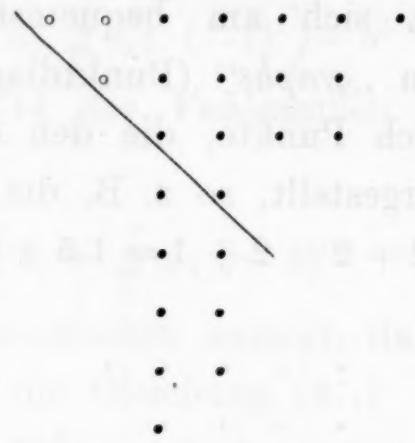
$$\frac{3^2-3}{2} = 3$$

Hilfspunkte in ein Dreieck

° °
°

und setze dieses links oben an das Diagramm:

*) American Journal of Math. 5 (1882), S. 251 = Coll. Math. Papers, Bd. 4, S. 1. — Siehe z. B. auch *Netto*, Kombinatorik, S. 159.



Nun führe man eine (hier bereits eingezeichnete) Trennungslinie unmittelbar unter der schiefen Seite des Dreiecks durch das Diagramm.

Faßt man nun die Punkte oberhalb dieser Linie nach Zeilen, die unterhalb der Linie nach Spalten zusammen, so ergibt sich jedesmal genau eine Zerlegung in zwei Gruppen verschiedener Summanden, von denen die obere um h oder um $h-1$ Summanden mehr erhält, je nachdem die Trennungslinie zwischen zwei neben- oder zwei unter einander stehenden Punkten aus dem Diagramm austritt; hier hat man oben 4 und unten 2 $(=4-3+1)$ Summanden. Dies entspricht genau der Zerlegungsformel

$$\sum_1^{\mu+h}{}' a_i + \sum_1^{\mu} b_i.$$

8. Gebrochene Argumente.

Ist

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_0^{\infty} f(s)\, x^s$$

die erzeugende Potenzreihe von f, so möge die Funktion, deren erzeugende Potenzreihe

$$\mathfrak{F}(x^n) = \sum_0^{\infty} f(s)\, x^{ns}$$

ist, mit

$$f\left(\frac{s}{n}\right)$$

oder wenn es auf das Argument nicht ankommt, mit

$$f\left(\frac{\ }{n}\right) \text{ oder kurz } f_{\overline{n}}$$

bezeichnet werden. Es kommt dies darauf hinaus, mit *Vahlen* (S. 7) festzusetzen, daß die Funktionen für gebrochene Argumente verschwinden, eine Festsetzung, die bei zahlentheoretischen Funktionen ganz naturgemäß ist.

9. Anwendungen.

Man hat, da

$$\varepsilon \underset{n}{-} = \varepsilon$$

ist, nach (*) in Nr. 4

$$\pi \underset{n}{-} \square \sigma \underset{n}{-} = \varepsilon ;$$

also ist jede der beiden Relationen

$$f \square \pi \underset{n}{-} = F, \quad F \square \sigma \underset{n}{-} = f$$

eine Folge der andern. Dies ist gerade der Inhalt von *Vahlens* Satz Seite 6 unten: „Von den beiden Gleichungen (29.)

$$\Sigma (-1)^k f(s - n\varpi_k) = F(s), \quad \Sigma F(s - nh)\sigma(h) = f(s)$$

ist jede eine Folge der andern."

Setzt man

$$\vartheta(s) = N(s = h^2; (-1)^h) \qquad (h \gtrless 0),$$

also ϑ für 0 gleich 1, für ungerade Quadrate gleich -2, für gerade gleich $+2$, sonst gleich Null, so lauten *Vahlens* Formeln (82.) und (83.)

$$\sum_k (-1)^k \tau(s - \varpi_k) = N(s = 2h^2; (-1)^h), \quad \tau(s) = \sum_{h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} (-1)^h \sigma(s - 2h^2)$$

jetzt kurz

$$\pi \square \tau = \vartheta \underset{2}{-}, \quad \tau = \sigma \square \vartheta \underset{2}{-}.$$

10. Darstellung einer Funktion durch eine andere.

Ist

$$f = g^{[c_1]} \square g \underset{2}{-}^{[c_2]} \square g \underset{3}{-}^{[c_3]} \square g \underset{4}{-}^{[c_4]} \square \cdots,$$

so möge dies die *Darstellung* von f durch g heißen. Diese Darstellung ist unter gewissen Voraussetzungen über f und g, die der Kürze halber hier übergangen werden mögen, immer und nur auf eine Art möglich.

11. Anwendungen.

Heißt ω jene Funktion, die für jedes (ganze nicht negative) Argument gleich 1 ist, so hat man

$$(*) \qquad \sigma = \omega \square \omega \underset{2}{-} \square \omega \underset{3}{-} \square \omega \underset{4}{-} \square \cdots,$$

wie aus der Bedeutung von σ folgt; denn es ist

$$\sigma = N(s = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 + \cdots)$$

und

$$\omega(s) = N(s = k_1 \cdot 1),\ \omega\left(\frac{s}{2}\right) = N(s = k_2 \cdot 2), \ldots .$$

Analog ist

$$(**) \qquad \varrho = \omega \square \omega_{\frac{}{3}} \square \omega_{\frac{}{5}} \square \cdots .$$

Hieraus folgt sofort

$$(***) \qquad \sigma = \varrho \square \sigma_{\frac{}{2}},$$

eine Formel, die sich bei *Vahlen* als (32.) in der Gestalt

$$\sigma(s) = \sum_k \varrho(s - 2k)\sigma(k)$$

findet.

Ist weiter η jene Funktion, die für 0 und 1 den Wert 1, sonst den Wert Null hat, so ist

$$\tau = \eta \square \eta_{\frac{}{3}} \square \eta_{\frac{}{5}} \square \cdots ;$$

die Begründung ist ganz analog wie vorhin. Man hat nun, weil das dyadische System ein einfaches Zahlensystem ist,

$$\omega = \eta \square \eta_{\frac{}{2}} \square \eta_{\frac{}{4}} \square \eta_{\frac{}{8}} \square \cdots ,$$

und wenn man dies in (**) einsetzt, so folgt

$$(****) \qquad \varrho = \eta \square \eta_{\frac{}{2}} \square \eta_{\frac{}{3}} \square \eta_{\frac{}{4}} \square \cdots .$$

In *Vahlens* Ausdrucksweise ist dies seine Formel (23.)

$$N(s = \Sigma a_i) = \varrho(s),$$

und die Übereinstimmung der beiden Zerlegungsanzahlen enthält den *Euler*schen Satz: Jede Zahl kann ebenso oft in verschiedene als in gleiche oder verschiedene ungerade Summanden zerlegt werden (*Vahlen*, Gleichung (9.)).

Man hat weiter

$$\omega = \eta \square \omega_{\frac{}{2}},$$

woraus nach (*) und (****) abermals (***) erschlossen werden kann; ferner

$$\omega \square \dot{\eta} = \varepsilon, \text{ daher}$$

$$\sigma^{[-1]} = \dot{\eta} \square \dot{\eta}_{\frac{}{2}} \square \dot{\eta}_{\frac{}{3}} \square \cdots ,$$

woraus sich abermals die Formel (*) in Nr. 6 ablesen läßt.

12. Ableitung.

Ist

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_0^\infty {}_s f(s) x^s$$

die erzeugende Potenzreihe der Funktion f, so möge die Funktion, deren erzeugende Potenzreihe

$$x\mathfrak{F}'(x) = \sum_0^\infty {}_s s f(s) x^s$$

lautet, die (*symbolische*) ***Ableitung*** von f genannt und mit f' bezeichnet werden; es ist also

$$f'(s) = s f(s).$$

Die Rechenregeln für die Ableitungen stimmen mit denen für die Ableitungen im gewöhnlichen Sinn überein, wobei an Stelle der Multiplikation die Komposition tritt; sie sollen daher der Kürze halber nicht eigens formuliert werden. Nur die Regel

$$\left(f\frac{}{n}\right)' = n f'\frac{}{n}$$

ist neu.

13. Der Operator Λ.

Es werde noch

$$f' \square f^{[-1]} = \Lambda f$$

gesetzt. Der Operator Λ entspricht, wie man sieht, der logarithmischen Differentiation.

Es gelten, wie leicht zu bestätigen, die Regeln

$$\Lambda(f \square g) = \Lambda f + \Lambda g$$

und

$$\Lambda\left(g^{[c_1]} \square g\frac{}{2}^{[c_2]} \square g\frac{}{3}^{[c_3]} \square \cdots = c_1 \Lambda g + 2c_2 (\Lambda g)\frac{}{2} + 3c_3 (\Lambda g)\frac{}{3} + \cdots .\right.$$

14. Anwendungen.

Man hat

$$\omega'(s) = s,$$

folglich (nach Nr. 11)

$$\Lambda\omega = \omega' \square \omega^{[-1]} = \omega' \square \dot{\eta};$$

diese Funktion hat, wie ohne weiters zu bestätigen, für jedes Argument den Wert 1, nur für das Argument 0 den Wert 0.

Also ist nach (*) in Nr. 11

$$\Lambda\sigma = \Lambda\omega + 2(\Lambda\omega)_{\frac{}{2}} + 3(\Lambda\omega)_{\frac{}{3}} + \cdots,$$

und die rechte Seite ergibt für jedes Argument s die Summe der Teiler von s, $S_d(s)$ nach *Vahlens* Bezeichnung. Demnach hat man

$$\sigma' \square \sigma^{[-1]} = S_d$$

oder

$$\sigma' = S_d \square \sigma,$$

und diese Formel sagt genau dasselbe aus wie *Vahlens* Formel (38.)

$$\sum_n S_d(n)\,\sigma(s-n) = s\cdot\sigma(s).$$

Geht man zur reziproken Funktion π über, so folgt

$$-\pi' = S_d \square \pi,$$

was mit *Vahlens* Formel (41.)

$$\sum_k (-1)^k S_d(s-\varpi_k) = 0 \text{ im allgemeinen, } = (-1)^{h-1}\varpi_h \text{ für } s = \varpi_h$$

(die ein Resultat von *Euler* wiedergibt), und weiter

$$(*) \qquad S_d = -\pi' \square \sigma,$$

was mit *Vahlens* Formel (42.)

$$S_d(s) = \sum_k (-1)^{k-1}\varpi_k\,\sigma(s-\varpi_k)$$

gleichwertig ist.

Ebenso könnten die andern Formeln *Vahlens*, in denen statt S_d andere Summen von Teilern auftreten, erhalten werden.

Man hat endlich nach *Jacobi* (*Vahlens* Formel (88.))

$$N(s = \varpi_\lambda + \varpi_\mu + \varpi_\nu;\ (-1)^{\lambda+\mu+\nu}) = N\Big(s = \frac{h^2+h}{2};\ (-1)^h(2h+1)\Big) \quad (h>0).$$

Die linke Seite kann mit

$$\pi^{[3]}(s)$$

bezeichnet werden. Wendet man den Operator Λ an, so ergibt sich nach (*)

$$(\pi^{[3]})' \square \pi^{[-3]} = 3\pi' \square \pi^{[-1]} = -3S_d$$

also

$$(\pi^{[3]})' = -\pi^{[3]} \square S_d,$$

was mit einer von *Halphén* (Bull. soc. math. V, S. 158—160) aufgestellten Formel gleichwertig ist.

Brünn, 28. Juli 1914.